Analisi Matematica 1, Scritto 1-A. Durata della prova: 2 ore **30.6.09**

Cognome: .... **Nome:** ....

Matricola: .... **Corso di Laurea:** ....

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
E6	
Σ	

Domanda 1

[2+3 punti]

(i) Dare la definizione di punto di accumulazione per un insieme $D \subset \mathbb{R}$.

(ii) $x = 0$ é di accumulazione per l'insieme $D = \left\{\frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\right\}$?

Risposta

(i) c è un pto. di accumulazione di D se $\exists\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ t.c.

- $x_n \in D\ \forall n \in \mathbb{N}$
- $x_n \neq c\ \forall n \in \mathbb{N}$
- $\lim_{n\to+\infty} x_n = c$

(ii) Si poiché $x_n := \frac{(-1)^n}{n}$, $n \geq 1$ verifica le 3 condizioni sopra elencati.

Domanda 2

[2+3 punti]

(i) Dare la definizione di punto di massimo locale per una funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

(ii) Enunciare il Teorema di Fermat per una funzione di più variabili.

Risposta

(i) $x_0 \in \mathbb{R}^2$ è un pto. di max. locale di f se $\exists\ \delta > 0$ t.c.

$f(x_0) \geq f(x)\quad \forall x \in \mathbb{R}^2$ con $\|x_0 - x\| < \delta$.

(ii) Se $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ammette in $x_0 \in D$ max. opp. min. locale e

- x_0 è un pto interno di D e
- f è differenziabile in x_0,

allora $\text{grad} f(x_0) = 0$

Esercizio 1 **[3 punti]**

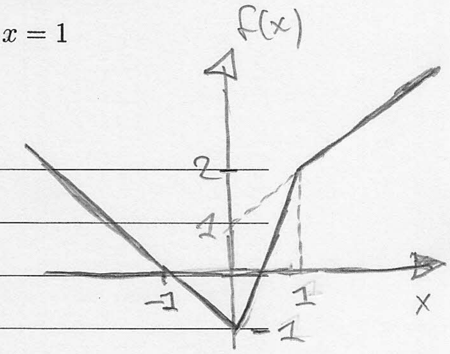
La funzione $f(x) = 2|x| - |x-1|$ ha

- ☒ a) un minimo in $x = 0$
- b) un minimo in $x = 0$ ed un minimo in $x = 1$
- c) non é limitata inferiormente;
- d) non é continua in in $x = 0$ e $x = 1$

Risoluzione

$$f(x) = \begin{cases} 2(-x) - (1-x) = -x-1 & \text{se } x < 0 \\ 2 \cdot x - (1-x) = 3x-1 & \text{se } 0 \le x < 1 \\ 2 \cdot x - (x-1) = x+1 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow \boxed{a}$



Esercizio 2 **[3 punti]**

Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ regolare e $(0,0)$ un punto di minimo per f. Allora

- a) $f_{xx}(0,0) > 0$
- ☒ b) $D_v f(0,0) = 0$ per ogni versore $v \in \mathbb{R}^2$
- c) $\det Hf(0,0) \neq 0$
- d) $f_{xx}(0,0) \cdot f_{yy}(0,0) > 0$

Risoluzione

Per il teorema di Fermat segue grad $f(0,0) = 0$ e quindi per il teorema del gradiente vale

$D_v f(0,0) = \text{grad} f(0,0) \cdot v = 0$

Esercizio 3 **[4 punti]**

Sia

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$$

una serie convergente. Allora

- a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a_n}$ converge
- b) Esiste $n > 0$ tale che per ogni $\epsilon > 0$, $a_n < \epsilon$
- c) Per ogni $\epsilon > 0$, esiste $M > 0$ t.c. per ogni $N > M$ vale $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} a_n < \epsilon$
- ☒ d) Per ogni $\epsilon > 0$, esiste $M > 0$ t.c. per ogni $n > M$ vale $a_n < \epsilon$

Risoluzione

Per la condizione necessaria per la convergenza vale $(-1)^n a_n \to 0 \Leftrightarrow a_n \to 0$ per $n \to +\infty$

$\Rightarrow \boxed{d}$ per la definizione di $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$

Esercizio 4

[4 punti]

Stabilire il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{3n-1}\right)^n \qquad \frac{n+1}{3n-1} =: a_n$$

Risoluzione

Applichiamo il criterio della radice:

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{n+1}{3n-1} \to \frac{1}{3} = q < 1 \quad (n \to +\infty)$$

$\Rightarrow$ La serie converge.

Esercizio 5

[4 punti]

Calcolare

$$I = \int \frac{1+\tan(x)}{1-\tan(x)}\,dx$$

Risoluzione

$$\frac{1+\tan(x)}{1-\tan(x)} = \frac{1+\frac{\sin(x)}{\cos(x)}}{1-\frac{\sin(x)}{\cos(x)}}$$

$$= \frac{\frac{\cos(x)+\sin(x)}{\cancel{\cos(x)}}}{\frac{\cos(x)-\sin(x)}{\cancel{\cos(x)}}}$$

$$= \frac{\cos(x)+\sin(x)}{\cos(x)-\sin(x)}$$

$$= -\frac{\cos(x)+\sin(x)}{\sin(x)-\cos(x)} = -\frac{f'(x)}{f(x)}$$

$$\Rightarrow I = -\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = -\ln|f(x)| + c$$

$$= -\ln|\cos(x)+\sin(x)| + c$$

Esercizio 6

[4 punti]

$$e^{1-\frac{1}{x}} = e \cdot e^{-\frac{1}{x}}$$

Studiare la funzione $f(x) = e^{\frac{x-1}{x}}$ e tracciarne un grafico approssimativo.

Risoluzione

- C.E: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- Segno: $f(x) > 0 \quad \forall x \in C.E.$
- $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = e^{1} = e \Rightarrow y = e$ è un'asintoto orizzontale.
- $\lim_{x \to 0^+} f(x) = e^{-\infty} = 0$, $\lim_{x \to 0^-} f(x) = e^{+\infty} = +\infty$
- $f'(x) = e \cdot \dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} > 0 \quad \forall x \neq 0 \Rightarrow f$ è sempre crescente
- $f''(x) = \dfrac{e \cdot e^{-\frac{1}{x}}(1-2x)}{x^4} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow x = \frac{1}{2}$ è un pto. di flesso