Cognome .... **Nome** ....

Matricola .... **Corso di Laurea:** Ingegneria dell'Informazione

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
Σ	

Domanda 1

[4 punti]

(i) Dare la definizione di successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ limitata.

(ii) Descrivere i possibili comportamenti al infinito di una successione limitata.

Risposta

(i) Una successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si dice limitata se esistono $m, M \in \mathbb{R}$ tale che $m \le a_n \le M$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

(ii) Una successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ limitata può essere
- irregolare come p.e. $(-1)^n_{n\in\mathbb{N}}$ oppure
- convergente visto che ogni successione convergente è limitata.

Non può essere invece divergente a $+\infty$ oppure $-\infty$.

Domanda 2

[4 punti]

(i) Enunciare il Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale.

(ii) Trovare gli intervalli di monotonia della funzione $F(x) = \displaystyle\int_0^x \big(|t+1| - 2\big)\cdot e^{-t^2}dt$, $x \in \mathbb{R}$.

Risposta

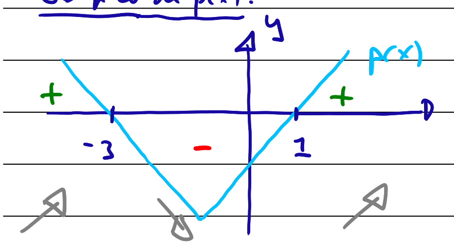
(i) Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua. Allora $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ definita come

$F(x) := \int_a^x f(t)\,dt$, $x\in[a,b]$, è derivabile con $F'(x) = f(x)$ $\forall x \in [a,b]$.

(ii)
- Per il teorema precedente F è derivabile con $F'(x) = (|x+1|-2)\cdot e^{-x^2}$.
- Visto che $e^{-x^2} > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$ segue che

segno $F'(x)$ = segno $|x+1|-2 =: p(x)$.

Grafico di $p(x)$:



Quindi F è
- crescente in $(-\infty,-3)\cup(1,+\infty)$,
- decrescente in $(-3,1)$.

Esercizio 1 **[4 punti]**

Studiare la convergenza della serie numerica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n \cdot \left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^n =: a_n$$

Risoluzione

La serie è a termini positivi. Applicando il criterio della radice segue

$$\sqrt[n]{a_n} = \underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\to 1} \cdot \left(\underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\to 1} - 1\right) \to 1 - 1 = 0$$

$\Rightarrow 1 \cdot 0 = 0 =: q < 1$ per $n \to +\infty$

Quindi la serie converge.

Esercizio 2 **[5 punti]**

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{2 \cdot \frac{\cos(x)-1}{x} + \sin(x)}{x^2 \cdot \ln(1+x)} =: \ell$$

Risoluzione

Si usa Taylor per il calcolo del limite:

- Denominatore: $\ln(1+x) \sim x$ quindi
  $x^2 \cdot \ln(1+x) \sim x^3$ per $x \to 0$.

- Numeratore (da sviluppare fino al 3° ordine)
  $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) \Rightarrow$

$$\frac{\cos(x)-1}{x} = \frac{-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)}{x} = -\frac{x}{2} + \frac{x^3}{24} + o(x^3) \text{ per } x \to 0$$

Quindi risulta $2 \cdot \frac{\cos(x)-1}{x} + \sin(x) = \cancel{-x} + \frac{x^3}{12} \cancel{+x} - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$

$$= \left(\frac{1}{12} - \frac{2}{12}\right) x^3 + o(x^3) = \frac{-1}{12} \cdot x^3 + o(x^3) \sim \frac{-1}{12} \cdot x^3$$

per $x \to 0$

$$\Rightarrow \ell = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{12} \cdot \cancel{x^3}^{\,1}}{\cancel{x^3}_{\,1}} = -\frac{1}{12}$$

Esercizio 3 [4 punti]

Calcolare il gradiente grad $f(x,y)$ della funzione $f(x,y) = \dfrac{xy \cdot e^{\sin(x)}}{\ln(y^2)}$.

Risoluzione

- $f_x(x,y) = \dfrac{y}{\ln(y^2)} \cdot \left(1 \cdot e^{\sin(x)} + x \cdot e^{\sin(x)} \cdot \cos(x)\right)$

$$= \frac{e^{\sin(x)} \cdot y}{\ln(y^2)} \cdot \left(1 + x \cdot \cos(x)\right)$$

- $f_y(x,y) = x \cdot e^{\sin(x)} \cdot \dfrac{\ln(y^2) \cdot 1 - \frac{1}{y^2} \cdot 2y \cdot y}{\left(\ln(y^2)\right)^2}$

$$= x \cdot e^{\sin(x)} \cdot \frac{\ln(y^2) - 2}{\left(\ln(y^2)\right)^2}$$

Quindi risulta

$$\text{grad } f(x,y) = \left(\frac{e^{\sin(x)} \cdot y}{\ln(y^2)} \cdot \left(1 + x \cdot \cos(x)\right),\ x \cdot e^{\sin(x)} \cdot \frac{\ln(y^2) - 2}{\left(\ln(y^2)\right)^2} \right)$$

Esercizio 4 [5 punti]

Studiare la continuità, la derivabilità e la differenziabilità in $(x_0, y_0) = (0,0)$ della funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(e^x - 1) \cdot y^3 - 3x^5}{x^4 + y^4} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Risoluzione

- Ponendo $y = m \cdot x$ risulta

$$\lim_{x \to 0} f(x, m \cdot x) = \lim_{x \to 0} \frac{(e^x - 1) \cdot m^3 \cdot x^3 - 3x^5}{x^4 + m^4 \cdot x^4}$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\underbrace{\frac{e^x - 1}{x}}_{\to 1} \cdot \frac{m^3}{1 + m^4} - \frac{3}{1 + m^4} \cdot x \right)$$

$$= \frac{m^3}{1 + m^4} \quad \text{dipende da } m \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow \lim_{(x,y) \to 0,0} f(x,y)$ non esiste $\Rightarrow$ f non è continua in $(0,0)$

$\Rightarrow$ f non è differenziabile in $(0,0)$

- Derivabilità: $f(h,0) = \dfrac{-3h^5}{h^4} = -3h$, $f(0,h) = 0 \quad \forall h \neq 0$.

Quindi risulta

$$f_x(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-3\cancel{h}}{\cancel{h}} = -3$$

$$f_y(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{0 - 0}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0$$

$\Rightarrow$ f è derivabile in $(0,0)$ con grad $f(0,0) = (-3, 0)$.

Esercizio 5

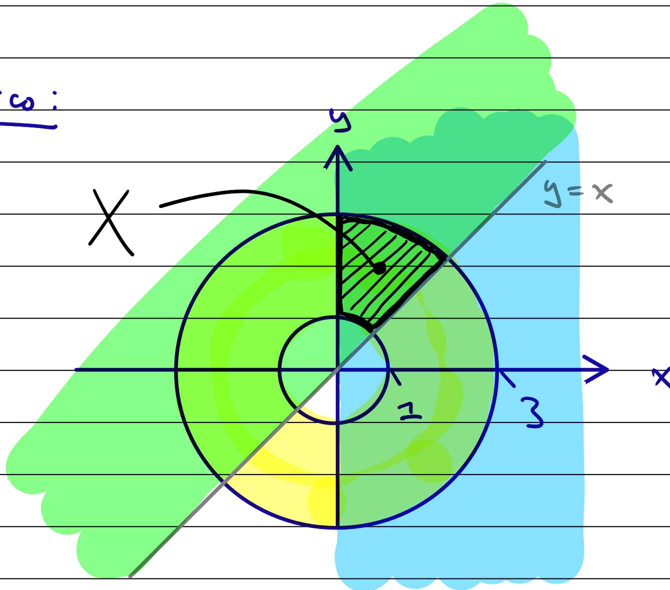
[6 punti]

Disegnare il dominio $X := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x^2 + y^2 \le 9, 0 \le x \le y\}$ e calcolare l'integrale doppio

$$\iint_X \frac{x \cdot y^2}{x^2 + y^2}\, dx\, dy =: I$$

Risoluzione

Grafico:



Coordinate polari:
$x = \rho \cdot \cos(\vartheta)$
$y = \rho \cdot \sin(\vartheta)$

- X corrisponde a $X' := \{(\rho, \vartheta) : 1 \le \rho \le 3, \frac{\pi}{4} \le \vartheta \le \frac{\pi}{2}\}$
  $= [1, 3] \times [\pi/4, \pi/2]$ in coordinate polari

- Passando alle coordinate polari (ρ, ϑ) segue:

$$I = \int_{\rho=1}^{3} \int_{\vartheta=\pi/4}^{\pi/2} \frac{\rho \cdot \cos(\vartheta) \cdot \cancel{\rho^2}^{1} \cdot \sin^2(\vartheta)}{\cancel{\rho^2}_{1}} \cdot \rho \cdot d\vartheta\, d\rho$$

$$= \int_1^3 \rho^2\, d\rho \cdot \int_{\pi/4}^{\pi/2} \underbrace{\sin^2(\vartheta)}_{= t^2} \cdot \underbrace{\cos(\vartheta)\, d\vartheta}_{= dt}$$

Sost.: $\sin(\vartheta) =: t$
$\Rightarrow \frac{dt}{d\vartheta} = \cos\vartheta \Rightarrow$
$\cos\vartheta \cdot d\vartheta = dt$

$$= \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_1^3 \cdot \int_{\dots}^{\dots} t^2\, dt$$

$$= \frac{3^3 - 1^3}{3} \cdot \frac{t^3}{3}\Big|_{\dots}^{\dots} = \frac{26}{3} \cdot \frac{\sin^3(\vartheta)}{3}\Big|_{\pi/4}^{\pi/2}$$

$$= \frac{26}{9}\left(1^3 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3\right) = \underline{\frac{26}{9} \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)}.$$