Analisi Matematica. Durata della prova: 2 ore **8.2.22**

Firma: ....

Cognome .... **Nome** ....

Matricola .... **Corso di Laurea:** Informatica

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
Σ	

Domanda 1

[4 punti]

(i) Dare la definizione di convergenza per una serie numerica $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$

(ii) Dire per quale $\alpha \in \mathbb{R}$ converge la serie armonica generalizzata $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$

Risposta

(i) Sia $S_n := a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Allora, $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge alla somma $S \in \mathbb{R}$ se $\lim_{n \to +\infty} S_n = S$.

Inoltre, in questo caso si scrive $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = S$.

(ii) La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ converge $\Leftrightarrow \alpha > 1$

Domanda 2

[4 punti]

(i) Enunciare il teorema di Rolle.

(ii) Calcolare i punti critici della funzione $f(x) = x \cdot e^{x^2-3x+1}$

Risposta

(i) Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua e derivabile in (a,b).

Se $f(a) = f(b)$, allora $\exists\, c \in (a,b)$ t. c. $f'(c) = 0$.

(ii) • x_0 è un punto critico di f se $f'(x_0) = 0$.

• $f'(x) = 1 \cdot e^{x^2-3x+1} + x \cdot e^{x^2-3x+1} \cdot (2x-3)$

$= (2x^2 - 3x + 1) \cdot \underbrace{e^{x^2-3x+1}}_{>0 \text{ sempre}} \overset{!}{=} 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow x = x_{1/2} = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 2} = \frac{3 \pm 1}{4} = \begin{cases} 1 \\ \frac{1}{2} \end{cases}$

Esercizio 1

[5 punti]

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\ln(1-2x^2)} - \cos(2x)}{x \cdot \sin(x^3)} =: \ell$$

Risoluzione

- $e^{\ln(1-2x^2)} = 1 - 2x^2$, • $\sin(x^3) \sim x^3$ per $x \to 0$

Quindi segue $\ell = \lim_{x\to 0} \frac{1-2x^2-\cos(2x)}{x^4}$

- $\cos(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} + o(t^4)$

$\Rightarrow \cos(2x) = 1 - \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^4}{24} + o(x^4) = 1 - 2x^2 + \frac{\cancel{16}^{\,2}}{\cancel{24}_{\,3}} \cdot x^4 + o(x^4)$

$\Rightarrow 1 - 2x^2 - \cos(2x) = \cancel{1} - \cancel{2x^2} - \cancel{1} + \cancel{2x^2} - \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)$
$\sim -\frac{2}{3}x^4$ per $x \to 0$

$\Rightarrow \ell = \lim_{x\to 0} \frac{-2/3\, x^4}{x^4} = -2/3$

Esercizio 2

[5 punti]

Calcolare l'integrale definito

$$I := \int_0^1 \sinh(\sqrt{x})\, dx$$

Risoluzione

- Si usa la sostituzione $t = \sqrt{x}$ $\Rightarrow$ • $x = t^2$
  • $dx = 2t\, dt$
  • $x = 0 \Rightarrow t = \sqrt{0} = 0$
  • $x = 1 \Rightarrow t = \sqrt{1} = 1$

Quindi risulta

$$I = \int_0^1 \underset{f'}{\sinh(t)} \cdot \underset{g}{2t}\, dt = \underset{f}{\cosh(t)} \cdot \underset{g}{2t}\Big|_0^1 - \int_0^1 \underset{f}{\cosh(t)} \cdot \underset{g'}{2}\, dt$$

$$= 2\cdot\left(\cosh(1)\cdot 2\cdot 1 - 0 - [\sinh(t)]_0^1\right)$$

$$= 2\cdot\left(\cosh(1) - \sinh(1) + \underbrace{\sinh(0)}_{=0}\right)$$

$$= 2\cdot\left(\frac{e^1+e^{-1}}{2} - \frac{e^1-e^{-1}}{2}\right) = 2\cdot e^{-1} = \frac{2}{e}$$

Esercizio 3

[4 punti]

Calcolare il piano tangente al grafico della funzione $f(x,y) = \dfrac{\ln(x)}{x \cdot y}$ nel punto $(x_0, y_0) = (e, 1)$.

Risoluzione

- $p(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)$

- $f(e,1) = \dfrac{\ln(e)}{e\cdot 1} = \dfrac{1}{e}$

- $f_x(x,y) = \dfrac{\cancel{x}\cdot y \cdot \frac{1}{\cancel{x}} - y \cdot \ln(x)}{(x\cdot y)^2} \Rightarrow f_x(e,1) = \dfrac{1 - 1\cdot \overbrace{\ln(e)}^{=1}}{(e\cdot 1)^2} = 0$

- $f_y(x,y) = -\dfrac{\ln(x)}{x\cdot y^2} \Rightarrow f_y(e,1) = -\dfrac{\ln(e)}{e\cdot 1^2} = -\dfrac{1}{e}$

Quindi $p(x,y) = \dfrac{1}{e} + 0\cdot(x-e) - \dfrac{1}{e}\cdot(y-1)$

$$= \frac{1}{e} - \frac{1}{e}\cdot(y-1)$$

Esercizio 4

[4 punti]

Studiare la continuità nel punto $(x_0, y_0) = (0, 0)$ della funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(1-\cos(x))\cdot \ln(1-y^2)}{x^4+2y^4} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Risoluzione

Poniamo $x = y$. Allora

$$\lim_{x\to 0} f(x,x) = \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos(x))\cdot \ln(1-x^4)}{\underbrace{x^4+2x^4}_{=3\cdot x^4}}$$

$$= \frac{1}{3}\cdot \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{1-\cos(x)}{x^2}}_{\to \frac{1}{2}} \cdot \underbrace{\frac{\ln(1-x^2)}{-x^2}}_{\to 1} \cdot (-1) \quad \text{per } x \to 0$$

$$= -\frac{1}{6} \neq 0 = f(0,0)$$

$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \neq 0 \Rightarrow f$ non è continua in $(0,0)$.

Esercizio 5 **[6 punti]**

Trovare il dominio, eventuali zeri, asintoti e punti di estremo locale della funzione

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{2x^2}$$

e tracciarne un grafico approssimativo.

Risoluzione

- Dominio: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$
- Zeri: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = x_{1/2} = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 3}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2}$

$= 3$ opp. 1

- Asintoti: $\lim_{x \to 0^\pm} f(x) = \frac{3}{(0^\pm)^2} = +\infty \Rightarrow x = 0$ è un asintoto verticale di f

$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{2}$ è un asintoto orizzontale di f

- Estremi locali: f è derivabile, quindi solo i punti critici sono candidati per punti di estremo locale.

$$f'(x) = \frac{2x^2 \cdot (2x - 4) - 4x \cdot (x^2 - 4x + 3)}{(2x^2)^2} = \frac{8x^2 - 12x}{4x^4} = \frac{2x - 3}{x^3}$$

$$= 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}.$$

Inoltre, $f'(x)$ cambia segno in $x = 3/2$ da "−" a "+" $\Rightarrow$ $x = 3/2$ è un pto. di minimo locale.

- Grafico: