

Cognome Nome

Matricola Corso di Laurea

Domanda 1

[4 punti]

- (i) Dare la definizione di derivata prima $f'(x_0)$ di una funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
- (ii) Studiare la derivabilità di $f(x) := |x| \cdot \sqrt[3]{x}$ in $x_0 := 0$.

Risposta

(i) $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$

(oppure $= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$)

Se questo limite converge $\rightarrow 0$

(ii) $f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h| \cdot \sqrt[3]{h} - 0}{h} = 0$

limitato: $-1 \leq \frac{|h|}{h} \leq 1$
 $\forall h \neq 0$

Quindi f è derivabile in $x_0 = 0$ con $\underline{\underline{f'(x_0) = 0}}$.

Domanda 2

[4 punti]

- (i) Enunciare la formula di Taylor con resto di Peano.
- (ii) Calcolare il Polinomio di Maclaurin $T_n(x)$ di ordine 4 della funzione $f(x) := x \cdot \ln(1+2x)$.

Risposta

(i) Sia $f \in C^n(a, b)$ e $x_0 \in (a, b)$. Allora $\forall x \in (a, b)$ vale

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x-x_0)^k + o((x-x_0)^n) \quad \text{per } x \rightarrow x_0$$

(ii) $= T_n(x)$

• $\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + o(t^3)$ per $t \rightarrow 0 \Rightarrow$ $t = 2x$

$$\ln(1+2x) = 2x - \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^3}{3} + o(x^3) \quad \text{per } x \rightarrow 0 \Rightarrow$$

$$x \cdot \ln(1+2x) = 2x^2 - 2x^3 + \frac{8}{3}x^4 + o(x^4) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

$$= \underline{\underline{T_4(x)}}$$

[5 punti]

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2 \sin(x)}{x} - \frac{2x}{\sin(x)}}{1 - \cos(x)} = : e$$

Risoluzione

- $$\frac{2 \frac{\sin(x)}{x} - \frac{2x}{\sin(x)}}{1 - \cos(x)} \sim 2 \cdot \frac{\frac{\sin^2(x) - x^2}{x \cdot \sin(x)}}{\frac{x^2}{2}} \sim x$$

$$\sim 4 \cdot \frac{\sin^2(x) - x^2}{x^4} \text{ per } x \rightarrow 0$$
- $$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4) \Rightarrow \sin^2(x) = x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^4)$$

$$\Rightarrow 4 \cdot \frac{\sin^2(x) - x^2}{x^4} = 4 \cdot \frac{\cancel{x^2} - \frac{x^4}{3} - \cancel{x^4} + o(x^4)}{x^4}$$

$$= 4 \cdot \left(-\frac{1}{3} + \frac{o(x^4)}{x^4} \right) \rightarrow -\frac{4}{3} \text{ per } x \rightarrow 0$$

[4 punti]

Equazione della retta tangente: $y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$
 $\quad\quad\quad = 6 - 4 \cdot (x - x_0)$

Quindi cerchiamo x_0 t.c.

- $f(x_0) = 6 = x_0^2 - 2x_0 + 3$ e
- $f'(x_0) = -4 = 2x_0 - 2$

$\Leftrightarrow$ • $x_0^2 - 2x_0 - 3 = 0 \Rightarrow x_0 = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \begin{matrix} 3 \\ -1 \end{matrix}$ e

- $2x_0 = -2 \Rightarrow x_0 = -1$

Quindi il punto cercato è $x_0 = -1$

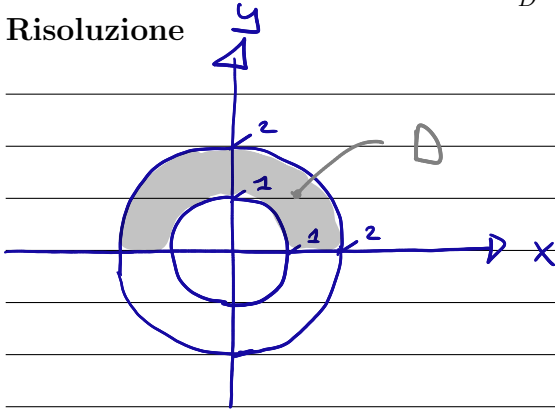
Esercizio 3

[5 punti]

Disegnare l'insieme $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}$ e calcolare l'integrale

$$I := \iint_D \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy.$$

Risoluzione



$$\begin{aligned} x &= \rho \cdot \cos \vartheta \\ y &= \rho \cdot \sin \vartheta \\ dx dy &= \rho \cdot d\rho \cdot d\vartheta \\ \sqrt{x^2+y^2} &= \rho \end{aligned}$$

- D corrisponde a D' in coordinate polari dato da $D' = \{(\rho, \vartheta) : 1 \leq \rho \leq 2, 0 \leq \vartheta \leq \pi\} = [1, 2] \times [0, \pi]$
Quindi risulta:

$$\begin{aligned} I &= \int_{\rho=1}^2 \int_{\vartheta=0}^{\pi} \frac{\rho \cdot (\cos \vartheta + \sin \vartheta)}{\rho} \cdot \rho \cdot d\vartheta \cdot d\rho = \int_1^2 \rho \cdot [\sin \vartheta - \cos \vartheta]_0^{\pi} d\rho \\ &= \frac{\rho^2}{2} \Big|_1^2 \cdot [\underbrace{\sin \pi}_{=0} - \underbrace{\cos \pi}_{=-1} - \underbrace{\sin 0}_{=0} + \underbrace{\cos 0}_{=1}] = \frac{4-1}{2} \cdot 2 = \underline{\underline{3}} \end{aligned}$$

Esercizio 4

[4 punti]

Studiare la continuità, la derivabilità e la differenziabilità in $(0,0)$ della funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y}{\sqrt[3]{x^3 + y^3}} & \text{se } x \neq -y, \\ 0 & \text{se } x = -y. \end{cases}$$

Risoluzione

- $\lim_{y \rightarrow 0} f(0, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-y}{\sqrt[3]{y^3}} = -1 \neq f(0, 0) = 0$
 $\Rightarrow f$ non è continua in $(0, 0)$
 $\Rightarrow f$ non è differenziabile in $(0, 0)$

- Derivabilità parziale:

$$f_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h^2}{\sqrt[3]{h^3}} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2}{h^2} = 1$$

$$f_y(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{-h}{\sqrt[3]{h^3}} - 0}{h} \quad \text{non converge}$$

- $\Rightarrow f$ non è derivabile parzialmente in $(0, 0)$ rispetto alla variabile y .

Esercizio 5

[6 punti]

Trovare il dominio, eventuali zeri, asintoti e punti di estremo locale della funzione

$$f(x) = (x^2 - 6x) \cdot e^{\frac{1}{x}} > 0 \quad \forall x \neq 0$$

e tracciarne un grafico approssimativo.

Risoluzione

• Dominio $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

• Zeri: $f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 6x = x \cdot (x - 6) = 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 6$

• $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x^2 - 6x) \cdot e^{\frac{1}{x}} \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} \pm\infty \cdot e^0 = \pm\infty$

Similmente $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty \Rightarrow$ non ci sono asintoti obliqui

• $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 - 6x) \cdot e^{\frac{1}{x}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{6}{t}\right) \cdot e^t = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{\frac{t^2}{1-6t}} \sim \frac{e^t}{-t/6} = -\infty$

• $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 \cdot e^{-\infty} = 0$

• Studio di $f'(x) = (2x - 6) \cdot e^{\frac{1}{x}} + (x^2 - 6x) \cdot e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)$
 $= \frac{2x^2 - 6x - x + 6}{x} \cdot e^{\frac{1}{x}} = (2x^2 - 7x + 6) \cdot \frac{e^{-x}}{x^2} > 0 \quad \forall x \neq 0$

$$\Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 7x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = x_{1/2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 4 \cdot 2 \cdot 6}}{2 \cdot 2} = \frac{7 \pm 1}{4} = \begin{cases} 3/2 \\ 2 \end{cases}$$

Dal momento $f'(x)$ cambia segno in

• $x_1 = 3/2$ da "+" a "-" $\Rightarrow$

$x_1 = 3/2$ è un pto. di max locale

• $x_2 = 2$ da "-" a "+" $\Rightarrow$

$x_2 = 2$ è un pto. di min locale

Grafico:

