Istituzioni di Matematiche 1° Modulo $\boxed{6\,\text{CFU}}$ 1-A. Durata: 90 min. 8.2.16

Firma: .....

Cognome ..... Nome ..... A.A. .....

Matricola ..... Corso di Laurea .....

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
Σ	

Domanda 1

[5 punti]

(i) Dare la definizione di funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua in $x = c$.

(ii) Disegnare il grafico di una funzione $f : [1, 4] \to \mathbb{R}$ continua in $x = 2$ e non continua in $x = 3$.

Risposta

(i)

cfr. compito da 9 CFU

(ii)

Domanda 2

[6 punti]

(i) Enunciare il teorema di Lagrange (chiamato anche teorema del valor medio).

(ii) Trovare un punto c del teorema di Lagrange per $f(x) = x^2 + x + 8$ in $[1, 3]$.

Risposta

(i)

— " —

(ii)

Esercizio 1

[5 punti]

Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n+21}{3n+4}\right)^n$$

Risoluzione

Cfr. compito da 9 CFU

Esercizio 2

[5 punti]

Studiare la convergenza o la divergenza del seguente integrale improprio. Nel caso converga, calcolarne il valore.

$$\int_0^2 \frac{1}{x^4} dx.$$

Risoluzione

— u —

Esercizio 3

[5 punti]

Calcolare lequazione della retta tangente t al grafico di $f(x) = \ln(1 + e^x)$ nel punto $x_0 = \ln(2)$.

Risoluzione

- $t(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$
- $f(x_0) = \ln(1 + \underbrace{e^{\ln 2}}_{=2}) = \underline{\underline{\ln(3)}}$
- $f'(x) = \frac{1}{1+e^x} \cdot e^x \Rightarrow f'(x_0) = \frac{e^{\ln(2)}}{1+e^{\ln(2)}} = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$

Quindi $t(x) = \ln(3) + \frac{2}{3}(x - \ln(2))$

Esercizio 4

[6 punti]

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)}}{x} =: \ell$$

Risoluzione

$$\frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)}}{x} = \frac{\frac{\sin(x) - x}{x \cdot \sin(x)}}{x} = \frac{\sin(x) - x}{x^2 \cdot \sin(x)} \sim x \text{ per } x \to 0$$

$$\sim \frac{\sin(x) - x}{x^3} \quad (*)$$

$$= \frac{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) - x}{x^3} = \frac{-\frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x^3}$$

$$\sim \frac{-\frac{x^3}{6}}{x^3} = -1/6 \quad \text{per } x \to 0$$

$\Rightarrow$ il limite converge a $\ell = -1/6$

(*) In alternativa si può applicare la regola di l'Hospital