Analisi Matematica 1, Scritto 1-B. Durata della prova: 2 ore 9.1.17

Firma: .....

Cognome ..... Nome ..... A.A. .....

Matricola ..... Corso di Laurea .....

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
Σ	

Domanda 1

[4 punti]

(i) Dare la definizione di successione a_n decrescente.

(ii) Dare un esempio di una successione a_n tale che $\lim_{n\to+\infty} a_n = 9$.

Risposta

(i) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è decrescente se

$a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) P.e. $a_n = 9 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ converge a $\ell = 9$.

Domanda 2

[4 punti]

(i) Enunciare il teorema di Lagrange (chiamato anche teorema del valor medio).

(ii) Trovare un punto c del teorema di Lagrange per la funzione $f(x) = x^2 + 5x + 1$ nell'intervallo $[2, 4]$.

Risposta

(i) dr. capitolo A

(ii) $f \in C[2,4]$ ed è derivabile in $(2,4)$. Inoltre

- $f'(x) = 2x+5 \Rightarrow f'(c) = 2c+5$
- $\frac{f(4)-f(2)}{4-2} = \frac{4^2+5\cdot 4+1-(2^2+5\cdot 2+1)}{2} = \frac{37-15}{2} = 11$

Quindi $f'(c) = \frac{f(4)-f(2)}{4-2} \Leftrightarrow 2c+5 = 11 \Leftrightarrow c = \frac{11-5}{2} = 3$

Esercizio 1

[5 punti]

Studiare il carattere della serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{3+k^6}{211+k^3+k^7} =: a_k \geq 0 \ \forall k \in \mathbb{N}$$

Risoluzione

$$\left.\begin{array}{l} \cdot\ 3+k^6 \sim k^6 \\ \cdot\ 211+k^3+k^7 \sim k^7 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{3+k^6}{211+k^3+k^7} \sim \frac{k^6}{k^7} = \frac{1}{k}$$

principio di sostituzione

$$\cdot \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} = +\infty$$

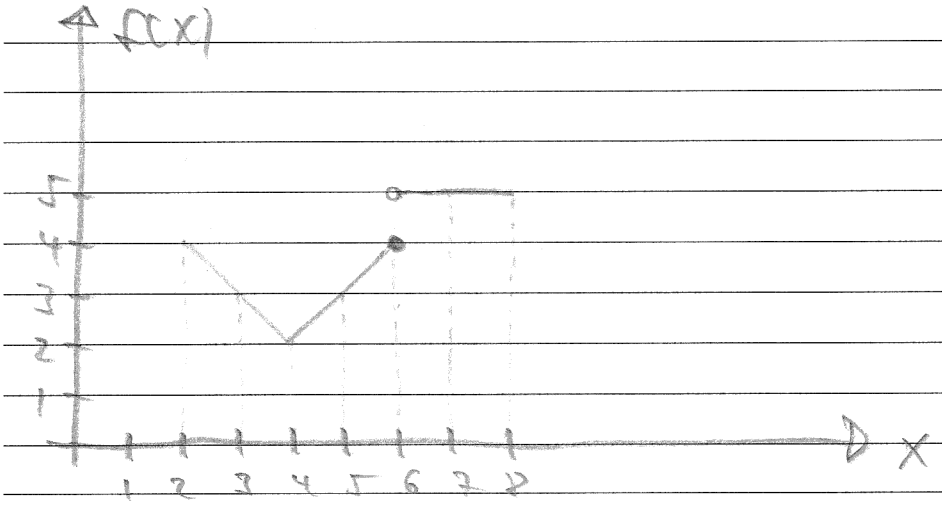
Quindi per il criterio del confronto asintotico segue che anche $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = +\infty$

Esercizio 2

[5 punti]

Disegnare il grafico di una funzione $f : [2,8] \to \mathbb{R}$ con $f'(3) = -1$, con un punto angoloso in $x = 4$, con $f'(5) = 1$, non continua in $x = 6$, con $f'(7) = 0$.

Risoluzione



Esercizio 3

[5 punti]

Trovare il piano tangente in $(1,1)$ alla funzione $f(x,y) = 5 + \ln(1 + x^2y^4)$.

Risoluzione

- $p(x,y) = f(1,1) + f_x(1,1)\cdot(x-1) + f_y(1,1)\cdot(y-1)$
- $f(1,1) = 5 + \ln(1 + 1^2\cdot 1^4) = 5 + \ln(2)$
- $f_x(x,y) = \frac{1}{1+x^2y^4}\cdot 2xy^4 \Rightarrow f_x(1,1) = \frac{2\cdot 1\cdot 1^4}{1+1^2\cdot 1^4} = \frac{2}{2} = 1$
- $f_y(x,y) = \frac{1}{1+x^2\cdot y^2}\cdot x^2\cdot 4y^3 \Rightarrow f_y(1,1) = \frac{4\cdot 1^2\cdot 1^3}{1+1^2\cdot 1^4} = \frac{4}{2} = 2$

$\Rightarrow p(x,y) = 5 + \ln(2) + 1\cdot(x-1) + 2(y-1)$

Esercizio 4

[4 punti]

Studiare il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{\frac{(1-\cos(x))\cdot y^2}{x^4+y^4}}_{=:f(x,y)}$$

Risoluzione

Poniamo $y = mx$, $m \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$$\lim_{x\to 0} f(x,mx) = \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos(x))\cdot m^2x^2}{x^4+m^4\cdot x^4}$$

$$= \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{1-\cos(x)}{x^2}}_{\to \frac{1}{2} \text{ per } x\to 0} \cdot \frac{m^2\cdot \cancel{x^2}}{\cancel{x^2}(1+m^4)}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{m^2}{1+m^4}$$ dipende da m

$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ <u>non</u> esiste

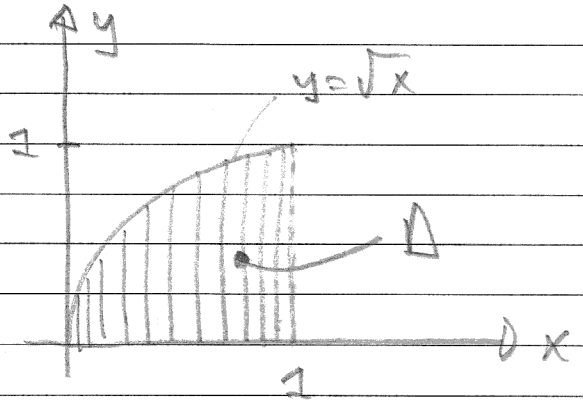
Esercizio 5

[5 punti]

Disegnare l'insieme $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le \sqrt{x}\}$. Calcolare l'integrale

$$\iint_D \underbrace{\frac{4y}{1+x^2}}_{=: f(x,y)} \, dx\, dy. \quad =: I$$

Risoluzione



f è continua e D è y-semplice. Quindi per Fubini-Tonelli vale

$$I = \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{\sqrt{x}} \frac{4y}{1+x^2} \, dy\, dx$$

$$= \int_{x=0}^{1} \frac{4}{1+x^2} \left[\frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{\sqrt{x}} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{2}{1+x^2} \left((\sqrt{x})^2 - 0^2 \right) dx$$

$$= \int_0^1 \frac{2x}{1+x^2} \, dx$$

$$= \left[\ln(1+x^2) \right]_0^1 = \ln(1+1^2) - \overbrace{\ln(1+0^2)}^{= \ln(1) = 0}$$

$$= \underline{\underline{\ln(2)}}$$