Analisi Matematica 1, Scritto 1-B. Durata della prova: 2 ore 15.2.10

Domanda 1 [3+2 punti]

(i) Dare la definizione di divergenza a $+\infty$ per una serie numerica (definendo la successione delle ridotte n-esime).

(ii) Descrivere il comportamento della serie armonica $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Risposta

(i) Data la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ definiamo $S_n := a_0 + a_1 + \ldots + a_n$ (= ridotta n-esima). Si dice che $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ diverge a $+\infty$ (cioè $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = +\infty$), se

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty.$$

(ii) La serie armonica generalizzata

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \begin{cases} +\infty, & \text{se } \alpha \leq 1 \\ \text{converge}, & \text{se } \alpha > 1 \end{cases}$$

Domanda 2 ~~*(Tra parentesi in alternativa per gli immatricolati del a.a.08/09)*~~ [2+3 punti]

(i) Dare la definizione di dominio x-semplice. ~~*(Dare la definizione di minimo locale per $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$)*~~

(ii) Enunciare il teorema di Fubini-Tonelli per domini x-semplici. ~~*(Enunciare il Teorema di Fermat)*~~

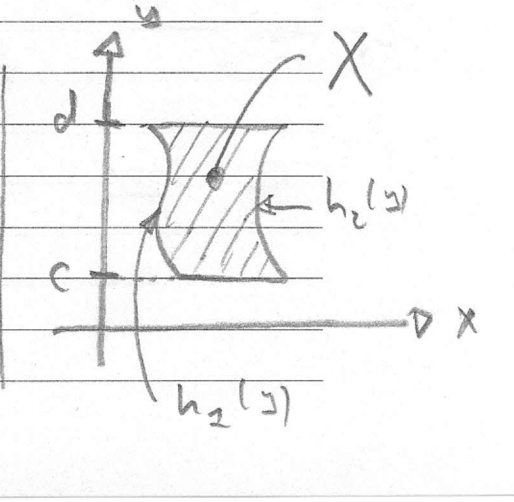
Risposta

(i) $X \subseteq \mathbb{R}^2$ si dice x-semplice, se esistono $c < d$ e $h_1, h_2 \in C[c,d]$ tale che

$$X = \{(x,y) \mid y \in [c,d],\ h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$$

(ii) Se $f : X \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è continua e X è x-semplice, allora f è integrabile su X e

$$\iint_X f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy$$



Esercizio 1

[3 punti]

Sia $f \in C^1(\mathbb{R})$. Allora

[a] $|f|$ é derivabile in 0   [b] se $|f|$ é derivabile in 0, allora $f(0) = 0$

[c] $|f|$ non é derivabile in 0   [~~d~~] se $f'(0) = 0$, allora $|f|$ é derivabile in 0   teor. dei Carabin.

Risoluzione $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ vale $\big||\alpha| - |\beta|\big| \leq |\alpha - \beta|$. Quindi segue

$$0 \leq \left| \frac{|f(h)| - |f(0)|}{h} \right| \leq \left| \frac{f(h) - f(0)}{h} \right| \to |f'(0)| = 0 \text{ per } h \to 0 \Rightarrow d)$$

Oppure: Non a) p.e. $f(x) = x$; non b) e c) p.e. $f(x) = 1 \ \forall x$

Esercizio 2

[3 punti]

Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione tale che $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ é decrescente. Allora $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è

[a] decrescente   [b] convergente   [~~c~~] limitata   [d] divergente

Risoluzione

Per ipotesi $|a_0| \geq |a_1| \geq \ldots \geq |a_n| \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow -|a_0| \leq a_n \leq +|a_0| \ \forall n \in \mathbb{N}$ cioè c).

Esercizio 3

[3 punti]

Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é una funzione differenziabile in $(0,0)$ e $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$, quale delle seguenti affermazioni é *falsa*

[a] f é continua in $(0,0)$ [b] $f(x,y) = f(0,0) + o(\|(x,y)\|)$ per $(x,y) \to (0,0)$

[c] $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = 0$ per ogni versore v [~~d~~] il piano tangente in $(0,0)$ ha equazione $z = 0$

Risoluzione

L'equazione del piano tangente in $(0,0)$ è

$$p(x,y) = f(0,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \cdot x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \cdot y$$

$$\xrightarrow{\text{ipotesi}} = f(0,0) = ?$$

e non $p(x,y) = 0 = ?$.

Esercizio 4

[4 punti]

Calcolare

$$-1 = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - \sqrt{1+x^2}}{\sin(x^2)} \sim x^2 \text{ per } x \to 0$$

Risoluzione

Quindi dobbiamo sviluppare il numeratore fino al 2° ordine: • $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$; • $\sqrt{1+t} = 1 + \frac{t}{2} + o(t)$ $(t \to 0)$

$\Rightarrow (t = x^2)$ $\sqrt{1+x^2} = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \Rightarrow$

$\cos(x) - \sqrt{1+x^2} = \cancel{1} - \frac{x^2}{2} - \cancel{1} - \frac{x^2}{2} + o(x^2) = -x^2 + o(x^2)$

$\sim -x^2$ per $x \to 0$

Quindi per il principio di sost.:

$$\frac{\cos(x) - \sqrt{1+x^2}}{\sin(x^2)} \sim \frac{-x^2}{x^2} = -1 = \text{limite per } x \to 0$$

Esercizio 5

[4 punti]

Calcolare

$$\int_1^e \ln^2(x)\,dx = I$$

Risoluzione

Sost: $\ln(x) = t$ cioè $x = e^t$. $\Rightarrow$ • $\frac{dx}{dt} = e^t \Rightarrow dx = e^t \cdot dt$

• $x = 1 \Rightarrow t = \ln(1) = 0$, $x = e \Rightarrow t = \ln(e) = 1$. Quindi

$$I = \int_0^1 \underbrace{t^2 \cdot e^t}_{f \cdot g'}\,dt \overset{\text{i.p.p.}}{=} \underbrace{t^2 \cdot e^t}_{f \cdot g}\Big|_0^1 - \int_0^1 \underbrace{2t \cdot e^t}_{f' \cdot g}\,dt$$

$$= e - 2 \cdot \int_0^1 \underbrace{t \cdot e^t}_{f \cdot g'}\,dt$$

$$\overset{\text{i.p.p.}}{=} e - 2\left(t \cdot e^t \Big|_0^1 - \int_0^1 \underbrace{e^t}_{f' \cdot g}\,dt \right)$$

$$= e - 2e + 2 \cdot e^t\Big|_0^1 = -e + 2e - 2 = \underline{\underline{e - 2}}$$

Oppure:

$$I = \int_1^e \underbrace{1 \cdot \ln^2(x)}_{f' \cdot g}\,dx \overset{\text{i.p.p.}}{=} \underbrace{x \cdot \ln^2(x)}_{f \cdot g}\Big|_1^e - \int_1^e \underbrace{\cancel{x} \cdot 2\ln(x) \cdot \frac{1}{\cancel{x}}}_{f \cdot g'}\,dx$$

$$= e - 2 \cdot \int_1^e \underbrace{1 \cdot \ln(x)}_{f' \cdot g}\,dx \overset{\text{i.p.p.}}{=} e - 2\left(\underbrace{x \cdot \ln(x)}_{f \cdot g}\Big|_1^e - \int_1^e \underbrace{x \cdot 1/x}_{f \cdot g'}\,dx \right)$$

$$= e - 2(e - (e-1)) = e - 2.$$

Esercizio 6

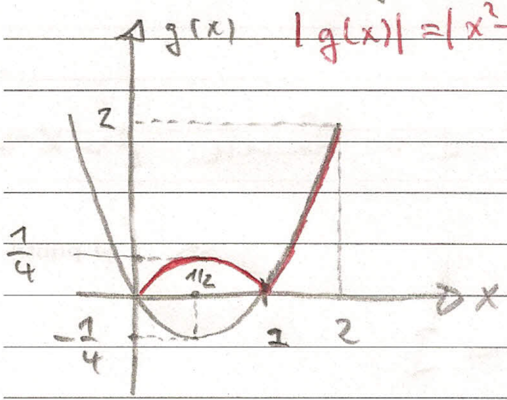
[5 punti]

Trovare inf, sup, max, min di $f(x) = 3^{|x^2-x|}$ in $(0,2)$.

Risoluzione

Consideriamo prima $g(x) = x^2 - x = x(x-1)$

Il grafico di g è una parabola aperta verso l'alto con $g(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ opp. $x = 1$:



Inoltre $g(2) = 2^2 - 2 = 2$ e per simmetria (opp. con Fermat) $g(x)$ ha un pto. di minimo in $x = 1/2$ con $g(1/2) = (1/2)^2 - 1/2 = -1/4$

Quindi risulta che $\{|g(x)| : x \in (0,2)\} = [0,2)$

Visto che la funzione $h(t) = 3^t$, $t \in \mathbb{R}$, è (strettamente) crescente segue per $f(x) = h(\underbrace{|g(x)|}_{= t})$

$$\{f(x) : x \in (0,2)\} = \{h(t) : t \in [0,2)\}$$
$$= [h(0), h(2)) = [3^0, 3^2)$$
$$= [1, 9)$$

$\Rightarrow$ $\inf f = \min f = 1$

$\sup f = 9$, $\max f$ <u>non</u> esiste.