

Analisi Matematica I (A.A. 2010/2011)

Docente: Klaus Engel

Esercizi su Limiti e Continuità

Esercizio 1. Calcolare (senza usare l'Hospital oppure Taylor), al variare dei parametri $r, s \in \mathbb{R}$ e $a > 0$, i seguenti limiti:

$$\begin{array}{lll} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{5^{\tan(x)} - 5\sqrt{x}}{\tan(x) - \sqrt{x}}, & \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{1 - \tan x}{1 - \frac{1}{\tan x}}, & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x - \cos x}{\sqrt{x}}, \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\ln(1-x))}{1-2^x}, & \lim_{x \rightarrow +\infty} x^r \ln(\cos(1/x)), & \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^{1/\ln x}, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(2x+4) - \ln(6x+5)), & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - 1}{\tan x}, & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - a^{\frac{x}{x+1}}}{x^2}, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^2} x^x, & \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{10+e^{-x}}{\ln x}}, & \lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{2}{x-1}}, \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \sin(x)}{1 - \cos(x)}, & \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2^x - 1}{\sqrt{1 - \cos(x)}}, & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(1/3x)}{3^{1/x} - 1}, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x)^2 \cdot \sin(e^{-x^2}), & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^r}{e^{1/x} - s}, & \lim_{x \rightarrow +\infty} (\arctan(x))^{-x}, \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot (\pi^x - e^x)}{\cos(x) - 1}, & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - \sin^2(x-1) - 4x + 2}{(x-1)^2}, & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos(x^2 - 1) - 1}{(x-1)^2}, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(\ln \left(\frac{x^2+1}{x^2} \right) \right), & \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 - \cos(1/x)} \cdot \ln(x \cos x + e^{2x}), & \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right). \end{array}$$

Esercizio 2. Studiare, al variare dei parametri a , la continuità delle seguenti funzioni:

$$\begin{array}{ll} f(x) := \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0, \\ a & \text{se } x = 0, \end{cases} & g(x) := \begin{cases} a - x + x^2 & \text{se } x > 0, \\ 1 + \sin(x) & \text{se } x \leq 0, \end{cases} \\ h(x) := \begin{cases} |x^2 - 2| & \text{se } x > 1, \\ \frac{-2x^3 + 5a}{3} & \text{se } x \leq 1, \end{cases} & j(x) := \begin{cases} (a-x)^2 & \text{se } x < 2, \\ 2e^x & \text{se } x \geq 2, \end{cases} \\ k(x) := \begin{cases} x^2 + a & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ \cos(x) & \text{altrimenti,} \end{cases} & l(x) := \begin{cases} \frac{3^{\sin x} - (2+a)^x}{x+x^2} & \text{se } x > 0, \\ \frac{\sin(1 - \cos(2ax)) - 2x^2}{x \cdot \ln(1 - x \cdot e^x)} & \text{se } x < 0, \\ 1 - a & \text{se } x = 0. \end{cases} \end{array}$$

Esercizio 3. Dimostrare che le equazioni seguenti ammettono almeno una soluzione reale positiva:

$$\begin{array}{ll} x^3 - 4x + 2 = 0, & e^x - e^{\sin(x)} - 1 = 0, \\ x + \sin(x) \cos(x) - 1 = 0, & x + \arctan x = 1. \end{array}$$

Esercizio 4. Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := x^3 + 4x + 1$.

- Mostrare che la funzione f è iniettiva e suriettiva, cioè invertibile.
- Calcolare un valore approssimativo dello zero di f con un errore inferiore a 2^{-3} .