Universitá degli studi dell'Aquila
Facoltá di Scienze MM.FF.NN.

Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Appunti del corso di Analisi Superiore 2
Prof. Francesco Leonetti

Redatti da:

Teresa Scarinci

Anno Accademico 2011/2012

Indice

Capitolo 1

Alcune proprietá degli insiemi di misura nulla.

Sia X un insieme e μ una misura definita su X (cioé, quella che qualcuno chiamerebbe misura esterna su X). Indichiamo con $\mathcal{M}_\mu(X) \subset \mathcal{P}(X)$ la collezione dei sottoinsiemi di X μ-misurabili.

Teorema 1.1. *Sia $A \subset X$ tale che $\mu(A) = 0$. Allora $A \in \mathcal{M}_\mu(X)$.*

Dimostrazione. Vogliamo mostrare che per ogni $B \in \mathcal{P}(X)$ vale:

$$\mu(B) = \mu(B \cap A) + \mu(B \setminus A). \tag{1.1}$$

Poiché $B = (B \cap A) \cup (B \setminus A)$, dalla subadditivitá della misura μ segue che:

$$\mu(B) \leq \mu(B \cap A) + \mu(B \setminus A). \tag{1.2}$$

Distinguiamo ora due casi:

- Caso $\mu(B) = +\infty$: da (1.2) segue che:

  $$+\infty = \mu(B) \leq \mu(B \cap A) + \mu(B \setminus A), \tag{1.3}$$

  quindi vale

  $$\mu(B \cap A) + \mu(B \setminus A) = +\infty. \tag{1.4}$$

  Ció mostra che (1.1) in questo caso equivale all'uguaglianza $+\infty = +\infty$ e quindi é verificata.

- Caso $\mu(B) < +\infty$: poiché $B \cap A \subset A$, dalla monotonia della misura μ segue che $\mu(B \cap A) \leq \mu(A)$. Per ipotesi $\mu(A) = 0$, quindi:

  $$0 \leq \mu(B \cap A) \leq \mu(A) = 0, \tag{1.5}$$

dunque vale:
$$\mu(B \cap A) = 0. \tag{1.6}$$
Inoltre, poiché $B \setminus A \subset B$, sempre dalla monotonia di μ segue che:
$$\mu(B \setminus A) \leq \mu(B). \tag{1.7}$$
Usando (1.6) e (1.7), l'equazione (1.2) diventa:
$$\mu(B) \leq \mu(B \cap A) + \mu(B \setminus A) = \mu(B \setminus A) \leq \mu(B). \tag{1.8}$$
Quindi $\mu(B) = \mu(B \cap A) + \mu(B \setminus A)$, ovvero segue (1.1).

□

Lemma 1.2. *Sia μ una misura su X e siano $E, F \subset X$. Supponiamo che $\mu(E) = 0$. Allora vale:*
$$\mu(E) + \mu(F) = \mu(E \cup F). \tag{1.9}$$
Dimostrazione. L'ipotesi $\mu(E) = 0$ ci dá:
$$\mu(E) + \mu(F) = \mu(F). \tag{1.10}$$
Dalla monotonia di μ segue:
$$\mu(F) \leq \mu(E \cup F). \tag{1.11}$$
La subadditivitá di μ ci dá:
$$\mu(E \cup F) \leq \mu(E) + \mu(F). \tag{1.12}$$
Riassumendo le osservazioni precedenti:
$$\mu(E) + \mu(F) = \mu(F) \leq \mu(E \cup F) \leq \mu(E) + \mu(F), \tag{1.13}$$
ovvero vale (1.10). □

Indichiamo con $\mathcal{L}^n$ la misura di Lebesgue definita su $\mathbb{R}^n$. Vediamo alcuni esempi di insiemi di misura nulla:

Lemma 1.3. *Sia $a \in \mathbb{R}^n$. Allora $\mathcal{L}^n(\{a\}) = 0$.*

Dimostrazione. Indichiamo con $B(a, \epsilon)$ la palla n-dimensionale di raggio ϵ e centro a. Allora per ogni $\epsilon > 0$ vale che $\{a\} \subset B(a, \epsilon)$. Dalla monotonia di μ segue che per ogni $\epsilon > 0$:

$$0 \leq \mathcal{L}^n(\{a\}) \leq \mathcal{L}^n(B(a, \epsilon)) = c_n \epsilon^n \tag{1.14}$$

per un'opportuna costante c_n indipendente da ϵ. Andando al limite per $\epsilon \longrightarrow 0^+$ in (1.14) otteniamo che $\mathcal{L}^n(\{a\}) = 0$.

□

Lemma 1.4. *L'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali ha misura di Lebesgue $\mathcal{L}^1$ nulla.*

Dimostrazione. I numeri razionali formano un insieme numerabile: $\mathbb{Q} = \cup_{k=1}^{+\infty}\{r_k\}$. Dalla subadditivitá della misura di Lebesgue segue che:

$$0 \leq \mathcal{L}^1(\mathbb{Q}) = \mathfrak{L}^1(\cup_{k=1}^{+\infty}\{r_k\}) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \mathcal{L}^1(\{r_k\}). \tag{1.15}$$

Dal lemma precedente sappiamo che $\mathcal{L}^1(\{r_k\}) = 0$, da cui segue che:

$$0 \leq \mathcal{L}^1(\mathbb{Q}) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} 0 = 0 \tag{1.16}$$

e quindi la tesi. □

Capitolo 2

Misure concentrate in alcuni punti.

Lemma 2.1. *Sia X un insieme e μ una misura su X. Sia b_1 un elemento di X tale che $0 < \mu(\{b_1\}) < +\infty$. Se la misura μ é concentrata in b_1, ovvero per ogni $E \subset X$ tale che $E \cap \{b_1\} = \emptyset$ vale $\mu(E) = 0$, allora:*

$$\mu = \mu(\{b_1\})\delta_{b_1}, \tag{2.1}$$

dove δ_{b_1} é la misura di Dirac concentrata nel punto b_1.

Dimostrazione. Sia μ una misura su X concentrata in $b_1 \in X$. Vediamo come agisce su $\mathcal{P}(X)$. Sia $E \subset X$:

- se $b_1 \notin E$, allora $\mu(E) = 0$ per ipotesi;

- supponiamo che $b_1 \in E$. Poiché $E \cap \{b_1\} = \{b_1\}$, allora:

  $$\mu(E \cap \{b_1\}) = \mu(\{b_1\}). \tag{2.2}$$

  Poiché $(E \setminus \{b_1\}) \cap \{b_1\} = \emptyset$ e μ é una misura concentrata in b_1, vale:

  $$\mu(E \setminus \{b_1\}) = 0. \tag{2.3}$$

  Dal fatto che $\{b_1\} \subset E$ e μ é monotona segue che:

  $$\mu(\{b_1\}) \leq \mu(E). \tag{2.4}$$

  Inoltre, vale che $E = (E \cap \{b_1\}) \cup (E \setminus \{b_1\})$ e μ é subadditiva, quindi:

  $$\mu(E) \leq \mu\left(E \cap \{b_1\}\right) + \mu\left(E \setminus \{b_1\}\right). \tag{2.5}$$

Da (2.2) e (2.3):

$$\mu(E \cap \{b_1\}) + \mu(E \setminus \{b_1\}) = \mu(\{b_1\}). \tag{2.6}$$

Riassumendo:

$$\mu(\{b_1\}) \leq \mu(E) \leq \mu(E \cap \{b_1\}) + \mu(E \setminus \{b_1\}) = \mu(\{b_1\}). \tag{2.7}$$

Da (2.7) possiamo concludere che $\mu(E) = \mu(\{b_1\})$.

In conclusione:

$$\mu(E) = \begin{cases} 0 & \text{se } b_1 \notin E; \\ \mu(\{b_1\}) & \text{se } b_1 \in E. \end{cases} \tag{2.8}$$

Vediamo ora come agisce su $\mathcal{P}(X)$ la misura $\mu(\{b_1\})\delta_{b_1}$.

- se $b_1 \notin E$, allora $\mu(\{b_1\})\delta_{b_1}(E) = 0$;

- se $b_1 \in E$, allora $\mu(\{b_1\})\delta_{b_1}(E) = \mu(\{b_1\})$.

Confrontando le due misure, possiamo affermare che:

$$\mu = \mu(\{b_1\})\delta_{b_1}.$$

□

Lemma 2.2. *Sia X un insieme, μ una misura su X. Siano $b_1, ..., b_n$ elementi distinti di X, con $n \geq 2$, tali che:*

1. *$0 < \mu(\{b_i\}) < +\infty$ per ogni $i = 1, ..., n$;*
2. *$\{b_i\}$ sono insiemi μ-misurabili per ogni $i = 1, ..., n$;*
3. *la misura μ é concentrata su $\{b_1, ..., b_n\}$, ovvero per ogni $E \subset X$ tale che $E \cap \{b_1, ..., b_n\} = \varnothing$ vale $\mu(E) = 0$.*

Allora:

$$\mu = \sum_{i=1}^{n} \mu(\{b_i\})\delta_{b_i}. \tag{2.9}$$

Dimostrazione. Sia μ una misura su X che verifichi le ipotesi 1, 2 e 3. Vediamo come agisce su $\mathcal{P}(X)$. Sia $E \subset X$:

- se $E \cap \{b_1, ..., b_n\} = \varnothing$, allora $\mu(E) = 0$ per ipotesi;

- supponiamo che $E \cap \{b_1, ..., b_n\} = \{b_{i_1}, ..., b_{i_p}\}$ per un opportuno insieme di indici non vuoto $\{i_1, ..., i_p\} \subset \{1, ..., n\}$ tale che se $r \neq s$ allora $i_r \neq i_s$. Per ipotesi gli insiemi $\{b_i\}$ sono misurabili per ogni $i = 1, ..., n$, dunque anche $\{b_1, ..., b_n\}$ é misurabile in quanto unione finita di insiemi misurabili. La definizione di μ-misurabilitá ci garantisce che, per ogni $E \subset X$, vale:

$$\begin{aligned} \mu(E) &= \mu(E \cap \{b_1, ..., b_n\}) + \mu(E \setminus \{b_1, ..., b_n\}) \\ &= \mu(\{b_{i_1}, ..., b_{i_p}\}) + \mu(E \setminus \{b_1, ..., b_n\}) \end{aligned} \tag{2.10}$$

  Poiché μ é concentrata su $\{b_1, ..., b_n\}$, abbiamo che $\mu(E \setminus \{b_1, ..., b_n\}) = 0$. L'equazione (2.10) diventa:

$$\mu(E) = \mu(\{b_{i_1}, ..., b_{i_p}\}) = \mu(\cup_{j=1}^p \{b_{i_j}\}). \tag{2.11}$$

  Gli insiemi $\{b_{i_j}\}$, per $j = 1, ..., p$, sono misurabili e a due a due disgiunti, quindi possiamo sfruttare l'additivitá di μ ed avere:

$$\mu(E) = \sum_{j=1}^{p} \mu(\{b_{i_j}\}) \tag{2.12}$$

In conclusione:

$$\mu(E) = \begin{cases} 0 & \text{se } \{b_1, ..., b_n\} \cap E = \emptyset; \\ \sum_{j=1}^p \mu(\{b_{i_j}\}) & \text{se } \{b_1, ..., b_n\} \cap E = \{b_{i_1}, ..., b_{i_p}\}. \end{cases}$$

(2.13)

Vediamo ora come agisce su $\mathcal{P}(X)$ la misura $\sum_{i=1}^n \mu(\{b_i\})\delta_{b_1}$. Sia $E \subset X$, allora:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \mu(\{b_i\})\delta_{b_i}\right)(E) = \sum_{i=1}^{n} \mu(\{b_i\})\delta_{b_i}(E). \tag{2.14}$$

- Se $\{b_1, ..., b_n\} \cap E = \emptyset$, allora $\sum_{i=1}^n \mu(\{b_i\})\delta_{b_i}(E) = 0$;
- se $\{b_1, ..., b_n\} \cap E = \{b_{i_1}, ..., b_{i_p}\}$, vale:

$$\delta_{b_i}(E) = \begin{cases} 1 \text{ se } i \in \{i_1, ..., i_p\}; \\ 0 \text{ se } i \notin \{i_1, ..., i_p\}, \end{cases} \tag{2.15}$$

  quindi:

$$\sum_{i=1}^{n} \mu(\{b_i\})\delta_{b_i}(E) = \sum_{j=1}^{p} \mu(\{b_{i_j}\}). \tag{2.16}$$

Confrontando le due misure, possiamo affermare che:

$$\mu = \sum_{i=1}^{n} \mu(\{b_i\})\delta_{b_i}.$$

□

Se togliamo l'ipotesi di misurabilitá degli insiemi $\{b_i\}$ allora il lemma precedente non é piú vero, in generale. Il prossimo esempio ci mostra che togliendo tale ipotesi non é detto che valga ancora l'uguaglianza (2.9).

Esempio 2.3. Sia $X = \{b_0, b_1, b_2\}$. L'insieme delle parti di X é:

$$\mathcal{P}(X) = \{\varnothing; \{b_0\}; \{b_1\}; \{b_2\}; \{b_0, b_1\}; \{b_0, b_2\}; \{b_1, b_2\}; \{b_0, b_1, b_2\}\}.$$

Definiamo la misura $\mu : \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0, +\infty]$ cosí:

$\mu(\varnothing) = 0;$
$\mu(\{b_0\}) = 0;$
$\mu(\{b_1\}) = 1;$
$\mu(\{b_2\}) = 2;$
$\mu(\{b_0, b_1\}) = 1;$
$\mu(\{b_0, b_2\}) = 2;$
$\mu(\{b_1, b_2\}) = 2;$
$\mu(\{b_0, b_1, b_2\}) = 2.$

Vogliamo ora mostrare che:

1. μ é una misura su X;
2. $\mathcal{M}_\mu = \{\varnothing; \{b_0\}; \{b_1, b_2\}; X\}$ (quindi $\{b_1\}$ e $\{b_2\}$ non sono misurabili);
3. l'uguaglianza (2.9) non é verificata.

1. Per definizione $\mu(\varnothing) = 0$. Siano $E_n, E \subset X$ per $n = 1, ..., +\infty$ e $E \subset \cup_{i=1}^{+\infty} E_i$. Dobbiamo mostrare che:

   $$\mu(E) \leq \sum_{i=1}^{+\infty} \mu(E_i). \tag{2.17}$$

   Nel caso in cui $\mu(E) = 0$, (2.17) é sicuramente verificata in quanto ogni insieme $E_n \in \mathcal{P}(X)$ ha misura non negativa per definizione.
   Sia $\mu(E) = 1$. Dalla definizione di μ possiamo notare che $b_1 \in E$. Poiché $E \subset \cup_{n=1}^{+\infty} E_n$, esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che $b_1 \in E_k$ e quindi $\mu(E_k) \geq 1$. Allora:

   $$\mu(E) = 1 \leq \mu(E_k) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(E_n). \tag{2.18}$$

L'ultimo caso da analizzare é $\mu(E) = 2$. Sempre dalla definizione di μ segue che $b_2 \in E$ e poiché $E \subset \cup_{n=1}^{+\infty} E_n$ allora esiste $h \in \mathbb{N}$ tale che $b_2 \in E_h$ e $\mu(E_h) = 2$. Dunque:

$$\mu(E) = 2 = \mu(E_h) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(E_n). \tag{2.19}$$

Abbiamo mostrato che μ é una misura su X.

2. L'insieme vuoto e l'insieme $\{b_0\}$ hanno misura nulla; dal Teorema 1.1 segue che $\varnothing, \{b_0\} \in \mathcal{M}_\mu$. Poiché anche i loro complementari sono misurabili, $X, \{b_1, b_2\} \in \mathcal{M}_\mu$.
Mostriamo che $\{b_1\} \notin \mathcal{M}_\mu$. Se $\{b_1\}$ fosse misurabile, allora per ogni $B \subset X$ risulterebbe:

$$\mu(B) = \mu(B \cap \{b_1\}) + \mu(B \setminus \{b_1\}). \tag{2.20}$$

Se prendessi $B = \{b_1, b_2\}$, allora $\mu(B) = 2$,

$$B \cap \{b_1\} = \{b_1\} \Rightarrow \mu(B \cap \{b_1\}) = 1,$$

$$B \setminus \{b_1\} = \{b_2\} \Rightarrow \mu(B \setminus \{b_1\}) = 2.$$

L'equazione (2.20) diventerebbe:

$$2 = \mu(B) = \mu(B \cap \{b_1\}) + \mu(B \setminus \}b_1\}) = 1 + 2 = 3, \tag{2.21}$$

ma ció non é possibile. Concludiamo che $\{b_1\} \notin \mathcal{M}_\mu$.
Poiché $\{b_1\} = X \setminus \{b_0, b_2\}$, anche l'insieme $\{b_0, b_2\}$ non é μ-misurabile, perché se lo fosse dovrebbe esserlo anche il suo complementare $\{b_1\}$.
Se $\{b_2\}$ fosse μ–misurabile allora, poiché $\{b_0\}$ é μ-misurabile, avremmo che anche $\{b_0, b_2\}$ sarebbe μ–misurabile in quanto unione di due insiemi μ-misurabili, ma ció é assurdo in quanto abbiamo giá visto che $\{b_0, b_2\} \notin \mathcal{M}_\mu$.
Per concludere notiamo che:

$$\{b_2\} = X \setminus \{b_0, b_1\},$$

Se per assurdo $\{b_0, b_1\}$ fosse μ-misurabile, anche il suo complementare lo sarebbero, dunque $\{b_2\} \in \mathcal{M}_\mu$ e ció contraddirebbe quanto affermato prima. In conclusione $\{b_0, b_1\} \notin \mathcal{M}_\mu$.

3. Verifichiamo l'equazione (2.9) per $E = \{b_1, b_2\}$. Per come abbiamo definito μ vale $\mu(\{b_1, b_2\}) = 2$, mentre:

$$\sum_{i=1}^{2} \mu(\{b_1\})\delta_{b_i}(\{b_1, b_2\}) = \mu(\{b_1\})\delta_{b_1}(\{b_1, b_2\}) + \mu(\{b_2\})\delta_{b_2}(\{b_1, b_2\})$$

$$= \mu(\{b_1\}) + \mu(\{b_2\}) = 1 + 2 = 3,$$

quindi l'equazione (2.9) non é verificata per tale insieme E.

Capitolo 3

Similitudini in $\mathbb{R}^n$.

Definizione 3.1. L'applicazione $S : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é una *similitudine* se esiste $\rho \in (0, +\infty)$ tale che $\| S(x) - S(y) \| = \rho \| x - y \|$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$. Indicheremo con $Lip(S)$ la costante ρ. Una similitudine con $Lip(S) = 1$ si dice *isometria.*

Osservazione 3.2. Sia $S : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una similitudine con $Lip(S) = \rho \in (0, +\infty)$. Allora S é iniettiva.

Dimostrazione. Mostriamo che dati $x, y \in \mathbb{R}^n$ tali che $S(x) = S(y)$, allora $x = y$. Poiché S é una similitudine vale:

$$0 = d(S(x), S(y)) = \rho d(x, y).$$

Dunque $d(x, y) = 0$ e dalle proprietá della distanza segue che $x = y$. □

Definizione 3.3. Sia $\lambda \in (0, +\infty)$. $O_\lambda : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é l'*omotetia* data da $O_\lambda(x) = \lambda x$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$.

Definizione 3.4. Sia $w \in \mathbb{R}^n$. $T_w : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é la *traslazione* data da $T_w(x) = x + w$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$.

Definizione 3.5. La trasformazione $Ort : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é detta *ortonormale* se é un'*isometria lineare.*

Teorema 3.6. *Sia $S : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una similitudine con $Lip(S) = \rho$, allora esiste una trasformazione ortonormale $Ort : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ed esiste $w \in \mathbb{R}^n$ tale che:*

$$S = O_\rho \circ T_w \circ Ort. \tag{3.1}$$

Dimostrazione. Notiamo che:

$$S(x) = \rho \frac{1}{\rho} S(x) = \rho \left[\frac{1}{\rho} [S(x) - S(0)] + \frac{1}{\rho} S(0) \right]$$

$$= O_\rho\left(\frac{1}{\rho}[S(x) - S(0)] + \frac{1}{\rho}S(0)\right).$$

Ponendo $w = \frac{1}{\rho}S(0)$, otteniamo che:

$$S(x) = O_\rho\left(T_w\left(\frac{1}{\rho}[S(x) - S(0)]\right)\right).$$

Definiamo la funzione:

$$g(x) = \frac{1}{\rho}[S(x) - S(0)].$$

Possiamo allora scrivere S come la composizione di tre funzioni:

$$S(x) = O_\rho(T_w(g(x))).$$

Per completare la dimostrazione del teorema basta mostrare che g é una trasformazione ortonormale, ovvero é un funzione lineare ed isometrica. Procediamo per passi:

1. vale $g(0) = 0$, infatti: $g(0) = \frac{1}{\rho}[S(0) - S(0)] = 0$;

2. g é un'isometria, infatti:

$$\| g(x) - g(y) \| = \| \frac{1}{\rho}[S(x) - S(0)] - \frac{1}{\rho}[S(y) - S(0)] \|$$

$$= \| \frac{1}{\rho}[S(x) - S(y)] \| = \frac{1}{\rho} \| S(x) - S(y) \| .$$

   Poiché S é una similitudine con costante di Lipschitz ρ segue:

$$\frac{1}{\rho} \| S(x) - S(y) \| = \frac{1}{\rho}\rho \| x - y \| = \| x - y \| .$$

   Abbiamo cosí mostrato che:

$$\| g(x) - g(y) \| = \| x - y \| \quad \text{per ogni } x, y \in \mathbb{R}^n,$$

   ovvero g é una isometria di $\mathbb{R}^n$.

3. g conserva la norma. Verifichiamolo: dai punti 1. e 2. si ha:

$$\| g(x) \| = \| g(x) - g(0) \| = \| x - 0 \| = \| x \|$$

   per ogni $x \in \mathbb{R}^n$.

4. g conserva il prodotto scalare. Per mostrarlo, abbiamo bisogno della seguente uguaglianza:

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{2}(\| x \|^2 + \| y \|^2 - \| x - y \|^2). \tag{3.2}$$

Verifichiamo (3.2).

$$\| x - y \|^2 = \langle x - y, x - y \rangle = \langle x, x - y \rangle - \langle y, x - y \rangle$$
$$= \langle x, x \rangle - 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle = \| x \|^2 + \| y \|^2 - 2\langle x, y \rangle.$$

Da qui segue (3.2).
Applichiamo l'uguaglianza (3.2) a $g(x)$ e $g(y)$ e ricordiamo che nel punto precedente abbiamo mostrato che g conserva la norma. Otteniamo:

$$\langle g(x), g(y) \rangle = \frac{1}{2}(\| g(x) \|^2 + \| g(y) \|^2 - \| g(x) - g(y) \|^2)$$
$$= \frac{1}{2}(\| x \|^2 + \| y \|^2 - \| x - y \|^2) = \langle x, y \rangle,$$

quindi:

$$\langle g(x), g(y) \rangle = \langle x, y \rangle \text{ per ogni } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

5. Consideriamo la base canonica di $\mathbb{R}^n$ composta da $e_1, ..., e_n$ e ricordiamo che $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{i,j}$. Dato che la funzione g conserva il prodotto scalare si ha:

$$\delta_{i,j} = \langle e_i, e_j \rangle = \langle g(e_i), g(e_j) \rangle \tag{3.3}$$

per cui anche $g(e_1), ..., g(e_n)$ forma una base di $\mathbb{R}^n$. Dunque, esistono $\theta_1, ..., \theta_n \in \mathbb{R}^n$ tali che:

$$g(x) = \sum_{i=1}^{n} \theta_i g(e_i). \tag{3.4}$$

Per ogni $j = 1, ..., n$:

$$\theta_j = \sum_{i=1}^{n} \theta_i \delta_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} \theta_i \langle g(e_i), g(e_j) \rangle$$
$$= \langle \sum_{i=1}^{n} \theta_i g(e_i), g(e_j) \rangle = \langle g(x), g(e_j) \rangle.$$

Poiché g conserva il prodotto scalare, segue che:

$$\theta_j = \langle x, e_j \rangle \text{ per ogni } j = 1, ..., n.$$

Sostituendo nella (3.4) otteniamo come g agisce su x:

$$g(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle g(e_i) \text{ per ogni } x \in \mathbb{R}^n.$$

6. g é lineare, infatti, dati $x, y \in \mathbb{R}^n$ e $t, s \in \mathbb{R}$, dal punto precedente segue che:

$$g(tx + sy) = \sum_{i=1}^{n} \langle tx + sy, e_i \rangle g(e_i) = \sum_{i=1}^{n} (t\langle x, e_i \rangle + s\langle y, e_i \rangle) g(e_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} t\langle x, e_i \rangle g(e_i) + \sum_{i=1}^{n} s\langle y, e_i \rangle g(e_i) = t \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle g(e_i) + s \sum_{i=1}^{n} \langle y, e_i \rangle g(e_i)$$

$$= tg(x) + sg(y).$$

Abbiamo quindi mostrato che g conserva la norma ed é lineare, dunque é un'applicazione ortonormale. $\square$

Osservazione 3.7. Sia $\lambda \in (0, +\infty)$ e sia $O_\lambda : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ l'omotetia tale che $O_\lambda(x) = \lambda x$, allora $O_\lambda(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$, cioé O_λ é suriettiva.

Dimostrazione. Sicuramente $O_\lambda(\mathbb{R}^n) \subset \mathbb{R}^n$. É sufficiente mostrare che $O_\lambda(\mathbb{R}^n) \supset \mathbb{R}^n$, ovvero che dato $y \in \mathbb{R}^n$ esiste x tale che $y = \lambda x$. Dato $y \in \mathbb{R}^n$, basta prendere $x = \frac{1}{\lambda} y$. Infatti:

$$y = \left(\lambda \frac{1}{\lambda}\right) y = \lambda \left(\frac{1}{\lambda} y\right) = O_\lambda \left(\frac{1}{\lambda} y\right) = O_\lambda(x).$$

$\square$

Osservazione 3.8. Sia $w \in \mathbb{R}^n$ e sia $T_w : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ la traslazione tale che $T_w(x) = x + w$, allora $T_w(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$, cioé T_w é suriettiva.

Dimostrazione. Sicuramente $T_w(\mathbb{R}^n) \subset \mathbb{R}^n$. É sufficiente mostrare che $T_w(\mathbb{R}^n) \supset \mathbb{R}^n$, ovvero che dato $y \in \mathbb{R}^n$ esiste x tale che $y = x + w$. Dato $y \in \mathbb{R}^n$, basta prendere $x = y - w$. Infatti:

$$y = y + (w - w) = (y - w) + w = T_w(y - w) = T_w(x).$$

$\square$

Osservazione 3.9. Sia $L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ lineare e iniettiva, allora $L(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$, cioé L é suriettiva. In particolare, ogni trasformazione ortonormale é suriettiva.

Dimostrazione. Dal Primo Teorema di Isomorfismo sappiamo che:

$$L(\mathbb{R}^n) \cong \frac{\mathbb{R}^n}{ker(L)}$$

e dato che L é iniettiva, $ker(L) = \{0\}$, quindi:

$$L(\mathbb{R}^n) \cong \frac{\mathbb{R}^n}{\{0\}} = \mathbb{R}^n.$$

□

Teorema 3.10. *Sia $S : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una similitudine, allora S é suriettiva ed iniettiva. In particolare, ogni isometria di $\mathbb{R}^n$ é suriettiva e iniettiva.*

Dimostrazione. Dall'Osservazione 3.2 sappiamo giá che l'applicazione S é iniettiva. Inoltre, dal Teorema 3.6 segue che S é la composizione di una traslazione, una omotetia e un'applicazione ortonormale. Nelle osservazioni precedenti abbiamo mostrato che queste tre funzioni sono suriettive, per cui si ha:

$$S(\mathbb{R}^n) = O_\rho(T_w(Ort(\mathbb{R}^n))) = O_\rho(T_w(\mathbb{R}^n)) = O_\rho(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n,$$

ovvero S é suriettiva.

□

Teorema 3.11. *Sia $S : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una similitudine, allora:*

$$S^{-1} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

é una similitudine con costante di Lipschitz:

$$Lip(S^{-1}) = [Lip(S)]^{-1}.$$

In particolare, se S é una isometria di $\mathbb{R}^n$, allora S^{-1} é ancora un'isometria di $\mathbb{R}^n$.

Dimostrazione. Sia S una similitudine e sia $\rho = Lip(S) \in (0, +\infty)$. Abbiamo visto precedentemente che S é un'applicazione iniettiva e suriettiva; di conseguenza S é invertibile, cioé esiste $S^{-1} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Mostriamo che S^{-1} é una similitudine.
Siano $u, v \in \mathbb{R}^n$. Poiché S é suriettiva, esistono $x, y \in \mathbb{R}^n$ tali che $u = S(x)$ e $v = S(y)$, ovvero $S^{-1}(u) = x$ e $S^{-1}(v) = y$. Allora, usando anche il fatto che S é una similitudine:

$$d(u, v) = d(S(x), S(y)) = \rho d(x, y) = \rho d(S^{-1}(u), S^{-1}(v)).$$

Dividendo per ρ otteniamo:

$$\frac{1}{\rho} d(u, v) = d(S^{-1}(u), S^{-1}(v)).$$

Ció mostra che S^{-1} é una similitudine con costante di Lipschitz $\frac{1}{\rho}$. □

Capitolo 4

Alcuni risultati di teoria della misura.

4.1 Push forward, pull back di una σ-algebra e trasformazione di Boreliani in Boreliani.

Siano X, Y due insiemi; consideriamo un'applicazione $f : X \longrightarrow Y$. Definiamo la push-forward della σ-algebra di X tramite f e mostriamo che essa é una σ-algebra d Y:

Proposizione 4.1. *Sia $f : X \longrightarrow Y$ e $\mathcal{D}$ una σ-algebra di sottoinsiemi di X. Definiamo l'insieme:*

$$\mathcal{E} = \{E \subset Y : f^{-1}(E) \in \mathcal{D}\}.$$

Allora $\mathcal{E}$ é una σ-algebra di sottoinsiemi di Y.

Dimostrazione. Mostriamo che $\mathcal{E}$ verifica tutte le proprietá della definizione di σ-algebra:

- $\varnothing \in \mathcal{E}$. Infatti: $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$ e $\varnothing \in \mathcal{D}$ poiché $\mathcal{D}$ é una σ-algebra;
- $Y \in \mathcal{E}$. Infatti $f^{-1}(Y) = X$ e $X \in \mathcal{D}$ poiché $\mathcal{D}$ é una σ-algebra;
- $\mathcal{E}$ é chiuso rispetto all'operazione di complementare. Infatti, sia $E \in \mathcal{E}$, allora $f^{-1}(E) \in \mathcal{D}$ e poiché $\mathcal{D}$ é una σ-algebra $X \setminus f^{-1}(E) \in \mathcal{D}$. Vale:

  $$X \setminus f^{-1}(E) = f^{-1}(Y \setminus E),$$

  quindi $f^{-1}(Y \setminus E) \in \mathcal{D}$, ovvero $Y \setminus E \in \mathcal{E}$;

- $\mathcal{E}$ é chiuso rispetto l'unione numerabile. Infatti, sia $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}$, allora $f^{-1}(E_n) \in \mathcal{D}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Poiché $\mathcal{D}$ é una σ−algebra, si ha che $\cup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(E_n) \in \mathcal{D}$. Vale:

$$\cup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(E_n) = f^{-1}(\cup_{n\in\mathbb{N}} E_n), \tag{4.1}$$

quindi in conclusione $f^{-1}(\cup_{n\in\mathbb{N}} E_n) \in \mathcal{D}$, ovvero $\cup_{n\in\mathbb{N}} E_n \in \mathcal{E}$.

□

Vediamo ora alcune proprietá delle funzioni μ-misurabili che seguono dalla Proposizione 4.1.

Corollario 4.2. *Sia $f : X \longrightarrow Y$ e sia μ una misura su X. Indichiamo con $\mathcal{M}$ la σ−algebra degli insiemi μ-misurabili di X e sia:*

$$\mathcal{E} = \{E \subset Y : f^{-1}(E) \in \mathcal{M}\}.$$

Allora $\mathcal{E}$ é una σ−algebra di sottoinsiemi di Y.

Dimostrazione. Basta prendere nella Proposizione precedente $\mathcal{D} = \mathcal{M}$. □

Quando Y é uno spazio metrico, indichiamo con $\mathcal{A}(Y)$ la collezione degli aperti di Y e con $\mathcal{B}(Y)$ la collezione dei boreliani di Y.

Corollario 4.3. *Sia $f : X \longrightarrow Y$ e sia μ una misura su X. Indichiamo con $\mathcal{M}$ la σ−algebra degli insiemi μ-misurabili di X e sia:*

$$\mathcal{E} = \{E \subset Y : f^{-1}(E) \in \mathcal{M}\}.$$

Sia inoltre Y uno spazio metrico e supponiamo che f sia μ-misurabile, ovvero per ogni aperto $A \subset Y$ risulta $f^{-1}(A) \in \mathcal{M}$, cioé $\mathcal{E} \supset \mathcal{A}(Y)$.
Allora $\mathcal{E} \supset \mathcal{B}(Y)$, cioé per ogni boreliano B di Y risulta che $f^{-1}(B) \in \mathcal{M}$.

Dimostrazione. Dalle ipotesi $\mathcal{E} \supset \mathcal{A}(Y)$, inoltre $\mathcal{E}$ é una σ-algebra, quindi:

$$\mathcal{E} \supset \bigcap_{\substack{\mathcal{C} \text{ é una } \sigma\text{-algebra}, \\ \mathcal{C} \supset A(Y).}} \mathcal{C} = \mathcal{B}(Y). \tag{4.2}$$

In conclusione $\mathcal{E} \supset \mathcal{B}(Y)$. □

Nei prossimi due corollari della Proposizione 4.1 descriviamo alcune proprietá delle funzioni boreliane.

Corollario 4.4. *Sia $f : X \longrightarrow Y$ e sia X uno spazio metrico. Sia:*

$$\mathcal{E} = \{E \subset Y : f^{-1}(E) \in \mathcal{B}(X)\}.$$

Allora $\mathcal{E}$ é una σ-algebra di Y.

Dimostrazione. Basta prendere nella Proposizione precedente $\mathcal{D} = B(X)$. □

Corollario 4.5. *Siano X, Y due spazi metrici e sia $f : X \longrightarrow Y$. Definiamo l'insieme:*

$$\mathcal{E} = \{E \subset Y : f^{-1}(E) \in \mathcal{B}(X)\}.$$

Supponiamo che la funzione f sia boreliana, cioé per ogni aperto $A \subset Y$ risulta che $f^{-1}(A) \in \mathcal{B}(X)$, ovvero $\mathcal{E} \supset \mathcal{A}(Y)$.
Allora $\mathcal{E} \supset \mathcal{B}(Y)$, cioé per ogni B boreliano di Y segue che $f^{-1}(B) \in \mathcal{B}(X)$.

Dimostrazione. Dalle ipotesi $\mathcal{E} \supset \mathcal{A}(Y)$, inoltre $\mathcal{E}$ é una σ-algebra, quindi:

$$\mathcal{E} \supset \bigcap_{\substack{\mathcal{C} \text{ é una } \sigma-\text{algebra}, \\ \mathcal{C} \supset A(Y).}} \mathcal{C} = \mathcal{B}(Y). \tag{4.3}$$

□

Definiamo la pull-back di una σ-algebra di un insieme e mostriamo che essa é ancora una σ-algebra:

Proposizione 4.6. *Sia $f : X \longrightarrow Y$ una funzione biunivoca e sia $\mathcal{E}$ una σ-algebra di sottoinsiemi di Y. Definiamo l'insieme:*

$$\mathcal{D} = \{D \subset X : f(D) \in \mathcal{E}\}.$$

Allora $\mathcal{D}$ é una σ-algebra di sottoinsiemi di X.

Dimostrazione. Mostriamo che $\mathcal{D}$ verifica tutte le proprietá della definizione di σ-algebra:

- $\varnothing \in \mathcal{D}$. Infatti: $f(\varnothing) = \varnothing$ e $\varnothing \in \mathcal{E}$ poiché $\mathcal{E}$ é una σ-algebra;
- $X \in \mathcal{D}$. Infatti, poiché f é surgettiva, $f(X) = Y$ e $Y \in \mathcal{E}$ poiché $\mathcal{E}$ é una σ-algebra;
- $\mathcal{D}$ é chiuso rispetto all'operazione di complementare. Infatti, sia $D \in \mathcal{D}$, allora $f(D) \in \mathcal{E}$ e poiché $\mathcal{E}$ é una σ-algebra $Y \setminus f(D) \in \mathcal{E}$. Poiché f é biunivoca, vale:
$$Y \setminus f(D) = f(X \setminus D),$$
quindi $f(X \setminus D) \in \mathcal{E}$, ovvero $X \setminus D \in \mathcal{D}$;

- $\mathcal{D}$ é chiuso rispetto l'unione numerabile. Infatti, sia $\{D_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}$, allora $f(D_n) \in \mathcal{E}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Poiché $\mathcal{E}$ é una $\sigma-$algebra, si ha che $\cup_{n\in\mathbb{N}} f(D_n) \in \mathcal{E}$. Vale:

$$\cup_{n\in\mathbb{N}} f(D_n) = f(\cup_{n\in\mathbb{N}} D_n), \tag{4.4}$$

quindi in conclusione $f(\cup_{n\in\mathbb{N}} D_n) \in \mathcal{E}$ e $\cup_{n\in\mathbb{N}} D_n \in \mathcal{D}$.

□

Vediamo ora alcune proprietá delle funzioni ν-misurabili che seguono dalla Proposizione 4.6.

Corollario 4.7. *Sia $f : X \longrightarrow Y$ biunivoca e sia ν una misura su Y. Indichiamo con $\mathcal{V}$ la $\sigma-$algebra degli insiemi ν-misurabili di Y e sia:*

$$\mathcal{D} = \{D \subset X : f(D) \in \mathcal{V}\}.$$

Allora $\mathcal{D}$ é una $\sigma-$algebra di sottoinsiemi di X.

Dimostrazione. Basta prendere nella Proposizione 4.6 $\mathcal{E} = \mathcal{V}$. □

Corollario 4.8. *Sia $f : X \longrightarrow Y$ una funzione biunivoca e sia ν una misura su Y. Indichiamo con $\mathcal{V}$ la $\sigma-$algebra degli insiemi ν-misurabili di Y e sia*

$$\mathcal{D} = \{D \subset X : f(D) \in \mathcal{V}\}.$$

Sia inoltre X uno spazio metrico e supponiamo che f^{-1} sia ν-misurabile, ovvero per ogni aperto $A \subset X$ risulta $f(A) \in \mathcal{V}$, cioé $\mathcal{D} \supset \mathcal{A}(X)$.
Allora $\mathcal{D} \supset \mathcal{B}(X)$, cioé per ogni boreliano B di X risulta che $f(B) \in \mathcal{V}$.

Dimostrazione. Dalle ipotesi $\mathcal{D} \supset \mathcal{A}(X)$, inoltre $\mathcal{D}$ é una σ-algebra, quindi:

$$\mathcal{D} \supset \bigcap_{\substack{\mathcal{C} \text{ é una } \sigma-\text{algebra}, \\ \mathcal{C} \supset A(Y).}} \mathcal{C} = \mathcal{B}(X). \tag{4.5}$$

□

Nei prossimi due corollari della Proposizione 4.6 descriviamo alcune proprietá delle funzioni boreliane.

Corollario 4.9. *Sia $f : X \longrightarrow Y$ una funzione biunivoca e sia Y uno spazio metrico. Sia:*

$$\mathcal{D} = \{D \subset X : f(D) \in \mathcal{B}(Y)\}.$$

Allora $\mathcal{D}$ é una σ-algebra di X.

Dimostrazione. Basta prendere nella Proposizione 4.6 $\mathcal{E} = B(Y)$. □

Corollario 4.10. *Siano X, Y due spazi metrici e sia $f : X \longrightarrow Y$ una funzione biunivoca. Definiamo l'insieme:*

$$\mathcal{D} = \{D \subset X : f(D) \in \mathcal{B}(Y)\}.$$

Supponiamo che la funzione f^{-1} sia boreliana, cioé per ogni aperto $A \subset X$ risulta che $f(A) \in \mathcal{B}(Y)$, ovvero $\mathcal{D} \supset \mathcal{A}(X)$.
Allora $\mathcal{D} \supset \mathcal{B}(X)$, cioé per ogni B boreliano di X segue che $f(B) \in \mathcal{B}(Y)$.

Dimostrazione. Dalle ipotesi $\mathcal{D} \supset \mathcal{A}(X)$, inoltre $\mathcal{D}$ é una σ-algebra, quindi:

$$\mathcal{D} \supset \bigcap_{\substack{\mathcal{C} \text{ é una } \sigma-\text{algebra}, \\ \mathcal{C} \supset A(X).}} \mathcal{C} = \mathcal{B}(X). \tag{4.6}$$

□

Riassumiamo i risultati principali di questa sezione nel seguente Corollario:

Corollario 4.11. *Siano X, Y due spazi metrici e sia $f : X \longrightarrow Y$ una funzione biunivoca. Supponiamo che f e f^{-1} siano funzioni boreliane. Allora vale che:*

- *per ogni B_y boreliano di Y risulta che $f^{-1}(B_y)$ é un boreliano di X,*
- *per ogni B_x boreliano di X risulta che $f(B_x)$ é un boreliano di Y.*

Un caso particolare é il seguente:

Corollario 4.12. *Siano X, Y due spazi metrici e sia $f : X \longrightarrow Y$ un omeomorfismo. Allora:*

- *per ogni B_y boreliano di Y risulta che $f^{-1}(B_y)$ é un boreliano di X,*
- *per ogni B_x boreliano di X risulta che $f(B_x)$ é un boreliano di Y.*

4.2 Gli insiemi $\Lambda(\mathbb{R})$, $\Lambda(\mathbb{R}^k)$ e alcune proprietá di funzioni boreliane e misurabili.

Sia X un insieme e Λ una σ-algebra di sottoinsiemi di X. Per $k \geq 1$ definiamo l'insieme:

$$\Lambda(\mathbb{R}^k) = \{f : X \longrightarrow \mathbb{R}^k : f^{-1}(A) \in \Lambda \text{ per ogni aperto } A \subset \mathbb{R}^k\}.$$

Per $k = 1$ abbiamo:

$$\Lambda(\mathbb{R}) = \{f : X \longrightarrow \mathbb{R} : f^{-1}(A) \in \Lambda \text{ per ogni aperto } A \subset \mathbb{R}\}.$$

Proposizione 4.13. *Sia* $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$*. Allora:*

1. $f \in \Lambda(\mathbb{R})$ *se e solo se* $f^{-1}((-\infty, a)) \in \Lambda$ *per ogni* $a \in \mathbb{R}$*;*

2. $f \in \Lambda(\mathbb{R})$ *se e solo se* $f^{-1}((-\infty, a]) \in \Lambda$ *per ogni* $a \in \mathbb{R}$*.*

Dimostrazione. 1. Supponiamo che $f \in \Lambda(\mathbb{R})$. Basta prendere come aperto $A = (-\infty, a)$ e per definizione di $\Lambda(\mathbb{R})$ segue che $f^{-1}((-\infty,\ a)) \in \Lambda$. Viceversa, supponiamo che $f^{-1}((-\infty, a)) \in \Lambda$ per ogni $a \in \mathbb{R}$. Sia $A \subset \mathbb{R}$ un aperto, allora per ogni $x \in A$ esiste $r_x > 0$ tale che $\mathcal{B}(x, r_x) \subset A$. Notiamo che esistono $\alpha_x,\ \beta_x \in \mathbb{Q}$ tali che:

$$x - r_x < \alpha_x < x < \beta_x < x + r_x. \tag{4.7}$$

Vale sicuramente che $x \in (\alpha_x, \beta_x) \subset A$. Sia:

$$I = \{(\alpha_x, \beta_x) \text{ che verificano (4.7) al variare di } x \in X\} \subset \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}.$$

Vale ovviamente che:

$$\cup_{(\alpha,\beta)\in I} (\alpha, \beta) \subset A. \tag{4.8}$$

Inoltre, se $x \in A$ esistono $\alpha_x,\ \beta_x \in \mathbb{Q}$ tali che $x \in (\alpha_x,\ \beta_x) \subset A$, quindi $(\alpha_x,\ \beta_x) \in I$. Allora:

$$x \in (\alpha_x,\ \beta_x) \subset \cup_{(\alpha,\beta)\in I}(\alpha,\ \beta),$$

quindi:

$$\cup_{(\alpha,\ \beta)\in I} (\alpha,\ \beta) \supset A. \tag{4.9}$$

Poiché $I \subset \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, la cardinalitá di I é al piú quella di $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, quindi é al piú numerabile. Allora, da (4.8) e (4.9), segue che per ogni aperto $A \subset \mathbb{R}$ esiste $J \subset \mathbb{N}$ ed esistono $\{\alpha_i\}_{i\in J}, \{\beta_i\}_{i\in J} \subset \mathbb{Q}$ tali che:

$$\cup_{i\in J} (\alpha_i,\ \beta_i) = A. \tag{4.10}$$

Da (4.10) segue che:

$$f^{-1}(A) = f^{-1}(\cup_{i\in I}(\alpha_i, \beta_i)) = \cup_{i\in I} f^{-1}((\alpha_i, \beta_i)).$$

Per mostrare che $f^{-1}(A)$ appartiene a Λ, poiché Λ é chiuso rispetto all'unione numerabile, basta mostrare che ogni termine $f^{-1}((\alpha_i, \beta_i))$ appartiene a Λ.

$$f^{-1}((\alpha_i, \beta_i)) = f^{-1}((-\infty, \beta_i) \cap (\alpha_i, +\infty)) = f^{-1}((-\infty, \beta_i)) \cap f^{-1}((\alpha_i, +\infty)).$$

Per ipotesi sappiamo che $f^{-1}((-\infty,\beta_i)) \in \Lambda$. Se mostriamo che anche $f^{-1}((\alpha_i,+\infty)) \in \Lambda$, allora anche l'intersezione di questi due termini, ovvero $f^{-1}((\alpha_i,\beta_i))$, appartiene a Λ e abbiamo concluso la dimostrazione.

$$f^{-1}((\alpha_i,+\infty)) = f^{-1}\left(\cup_{n=1}^{+\infty}\left[\alpha_i+\frac{1}{n},+\infty\right)\right) = \cup_{n=1}^{+\infty} f^{-1}\left(\left[\alpha_i+\frac{1}{n},+\infty\right)\right)$$

$$= \cup_{n=1}^{+\infty} f^{-1}\left(\mathbb{R}\setminus\left(-\infty,\alpha_i+\frac{1}{n}\right)\right) = \cup_{n=1}^{+\infty}\left[X\setminus f^{-1}\left(\left(-\infty,\alpha_i+\frac{1}{n}\right)\right)\right].$$

Per ipotesi $f^{-1}\left(\left(-\infty,\alpha_i+\frac{1}{n}\right)\right) \in \Lambda$, quindi anche il complementare e l'unione numerabile dei complementari appartengono a Λ. In conclusione $f^{-1}((\alpha_i,+\infty)) \in \Lambda$.

2. Supponiamo che $f \in \Lambda(\mathbb{R})$. Notiamo che:

$$f^{-1}((-\infty,a]) = f^{-1}\left(\cap_{n=1}^{+\infty}\left(-\infty,a+\frac{1}{n}\right)\right) = \cap_{n=1}^{+\infty} f^{-1}\left(\left(-\infty,a+\frac{1}{n}\right)\right).$$

Poiché $\left(-\infty,a+\frac{1}{n}\right)$ é un aperto di $\mathbb{R}$, allora $f^{-1}\left(\left(-\infty,a+\frac{1}{n}\right)\right) \in \Lambda$. Λ é una σ-algebra, quindi contiene anche l'intersezione numerabile di tale insiemi e concludiamo che $f^{-1}((-\infty,a]) \in \Lambda$.
Viceversa, supponiamo che $f^{-1}((-\infty,a]) \in \Lambda$. Per ogni $a \in \mathbb{R}$ risulta:

$$(-\infty,a) = \cup_{n=1}^{+\infty}\left(-\infty,a-\frac{1}{n}\right],$$

quindi:

$$f^{-1}((-\infty,a)) = f^{-1}\left(\cup_{n=1}^{+\infty}\left(-\infty,a-\frac{1}{n}\right]\right) = \cup_{n=1}^{+\infty} f^{-1}\left(\left(-\infty,a-\frac{1}{n}\right]\right).$$

Per ipotesi $f^{-1}\left(\left(-\infty,a-\frac{1}{n}\right]\right) \in \Lambda$ e anche l'unione numerabile di questi insiemi appartiene a Λ, in quanto Λ é una σ-algebra. Allora $f^{-1}((-\infty,a)) \in \Lambda$ per ogni $a \in \mathbb{R}$, ma per il punto 1 ció é equivalente a $f \in \Lambda(\mathbb{R})$.

□

Proposizione 4.14. *Se esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) = c$ per ogni $x \in X$, allora $f \in \Lambda(\mathbb{R})$.*

Dimostrazione. Sia A un aperto di $\mathbb{R}$. Risulta:

$$f^{-1}(A) = \begin{cases} X & \in \Lambda \quad \text{se } c \in A; \\ \varnothing & \in \Lambda \quad \text{se } c \notin A, \end{cases} \tag{4.11}$$

quindi $f^{-1}(A) \in \Lambda$ per ogni aperto A di $\mathbb{R}$. □

Proposizione 4.15. *Sia* $B \subset X$. *Allora* $B \in \Lambda$ *se e solo se* $1_B \in \Lambda(\mathbb{R})$.

Dimostrazione. Supponiamo che $B \in \Lambda$, allora:

$$1_B(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in B \\ 0 & \text{se } x \notin B \end{cases} \tag{4.12}$$

ovvero:

$$1_B = \begin{cases} 1 & \text{su } B \\ 0 & \text{su } X \setminus B, \end{cases} \tag{4.13}$$

Sia A un aperto di $\mathbb{R}$, allora:

$$(1_B)^{-1}(A) = \begin{cases} X & \text{se } 1 \in A \text{ e } 0 \in A; \\ B & \text{se } 1 \in A \text{ e } 0 \notin A; \\ X \setminus B & \text{se } 1 \notin A \text{ e } 0 \in A; \\ \varnothing & \text{se } 1 \notin A \text{ e } 0 \notin A;. \end{cases} \tag{4.14}$$

Per ipotesi $B \in \Lambda$; inoltre, poiché Λ é una σ-algebra, anche $X \setminus B$, X e $\varnothing$ appartengono a Λ, dunque $(1_B)^{-1}(A) \in \Lambda$ per ogni A aperto di $\mathbb{R}$, ovvero $1_B \in \Lambda(\mathbb{R})$.
Viceversa, supponiamo che $1_B \in \Lambda(\mathbb{R})$. Notiamo che:

$$B = \{x \in X : \ 1_B(x) = 1\} = \left\{x \in X : \ 1_B(x) \geq \frac{1}{2}\right\} = (1_B)^{-1}\left(\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)\right)$$
$$= (1_B)^{-1}\left(\mathbb{R} \setminus \left(-\infty, \frac{1}{2}\right)\right) = X \setminus \left[(1_B)^{-1}\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)\right].$$

L'insieme $(1_B)^{-1}\left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \in \Lambda$, poiché per ipotesi $1_B \in \Lambda(\mathbb{R})$. Anche il complementare di $(1_B)^{-1}\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$, ovvero B, appartiene a Λ, poiché Λ é una σ-algebra. □

Proposizione 4.16. *Se* $f \in \Lambda(\mathbb{R})$, *allora vale che:*

1. $\{x \in X : \ f(x) < 0\} \in \Lambda$;
2. $\{x \in X : \ f(x) \geq 0\} \in \Lambda$;
3. $1_{\{f<0\}} \in \Lambda(\mathbb{R})$;
4. $1_{\{f\geq 0\}} \in \Lambda(\mathbb{R})$.

Dimostrazione. Notiamo che:

$$\{x \in X : \ f(x) < 0\} = f^{-1}((-\infty, 0)).$$

L'insieme $(-\infty, 0)$ é un aperto di $\mathbb{R}$ e poiché $f \in \Lambda(\mathbb{R})$ segue che $f^{-1}((-\infty, 0)) \in \Lambda$. L'insieme $\{x \in X : \ f(x) \geq 0\}$ é il complementare dell'insieme del punto 1, quindi appartiene a Λ in quanto Λ é una σ-algebra. I punti 3 e 4 seguono dalla Proposizione 4.15. □

Proposizione 4.17. *Se $f \in \Lambda(\mathbb{R})$, allora:*

1. $-f \in \Lambda(\mathbb{R})$;
2. $\frac{1}{2}f \in \Lambda(\mathbb{R})$;
3. $f^2 \in \Lambda(\mathbb{R})$;
4. *se* $f(x) \neq 0$ *per ogni* $x \in X$, *allora* $\frac{1}{f} \in \Lambda(\mathbb{R})$.

Dimostrazione. 1. Per ogni $a \in \mathbb{R}$ vale:

$$(-f)^{-1}\left((-\infty,\ a)\right) = \{x \in X :\ -f(x) < a\} = \{x \in X :\ f(x) > -a\}$$
$$= f^{-1}\left((-a, +\infty)\right) = f^{-1}\left(\mathbb{R} \setminus (-\infty, -a]\right) = X \setminus f^{-1}\left((-\infty, -a]\right).$$

Per ipotesi $f \in \Lambda(\mathbb{R})$, quindi dalla Proposizione 4.13 segue che $f^{-1}\left((-\infty, -a]\right) \in \Lambda$. Poiché Λ é una σ-algebra, essa contiene anche il suo complementare, dunque $X \setminus f^{-1}\left((-\infty, -a]\right) \in \Lambda$. Abbiamo cosí mostrato che $f^{-1}((-\infty,\ a)) \in \Lambda$ per ogni $a \in \mathbb{R}$, dunque $\left(\frac{1}{2}f\right)^{-1}\left((-\infty,\ a)\right) \in \Lambda$ per ogni $a \in \mathbb{R}$ e ció prova il punto 1.

2. Per ogni $a \in \mathbb{R}$ vale:

$$\left(\frac{1}{2}f\right)^{-1}\left((-\infty,\ a)\right) = \{x \in X :\ \frac{1}{2}f(x) < a\} = \{x \in X :\ f(x) < 2a\}$$
$$= f^{-1}\left((-\infty,\ 2a)\right).$$

Per ipotesi $f \in \Lambda(\mathbb{R})$, quindi $f^{-1}\left((-\infty,\ 2a)\right) \in \Lambda$.

3. Se $a \leq 0$, allora:

$$\left(f^2\right)^{-1}\left((-\infty,\ a)\right) = \{x \in X :\ f^2(x) < a\} = \varnothing \in \Lambda.$$

Se $a > 0$, allora:

$$\left(f^2\right)^{-1}\left((-\infty,\ a)\right) = \{x \in X :\ f^2(x) < a\} = \{x \in X :\ -\sqrt{a} < f(x) < \sqrt{a}\}$$
$$= f^{-1}\left((-\sqrt{a}, \sqrt{a})\right).$$

L'insieme $(-\sqrt{a}, \sqrt{a})$ é un aperto di $\mathbb{R}$, quindi poiché $f \in \Lambda(\mathbb{R})$ segue che $(f^2)^{-1}\left((-\infty,\ a)\right) \in \Lambda$. In conclusione $(f^2)^{-1}((-\infty,\ a))$ per ogni $a \in \mathbb{R}$.

4. Sia $a \in (0,\ \infty)$, allora:

$$\left(\frac{1}{f}\right)^{-1}((-\infty,\ a)) = \{x \in X:\ \frac{1}{f(x)} < a\} =$$

$$\left\{x \in X : f(x) < 0, \frac{1}{f(x)} < a\right\} \cup \left\{x \in X:\ f(x) > 0,\ \frac{1}{f(x)} < a\right\}.$$

Poiché $a > 0$ segue che:

$$\left(\frac{1}{f}\right)^{-1}((-\infty,\ a)) =$$

$$\left\{x \in X : f(x) < 0, \frac{1}{f(x)} < a\right\} \cup \left\{x \in X:\ f(x) > 0,\ \frac{1}{f(x)} < a\right\} =$$

$$f^{-1}((-\infty,\ a)) \cup f^{-1}\left(\left(\frac{1}{a},\ +\infty\right)\right).$$

Poiché $f \in \Lambda(\mathbb{R})$, allora $f^{-1}((-\infty,\ a))$ e $f^{-1}((\frac{1}{a},\ +\infty))$ appartengono a Λ e anche la loro intersezione appartiene a Λ, poiché Λ é una σ-algebra. Nel caso in cui $a = 0$, vale che:

$$\left(\frac{1}{f}\right)^{-1}((-\infty,\ a)) = \left\{x \in X:\ \frac{1}{f(x)} < 0\right\} =$$

$$\{x \in X:\ f(x) < 0\} = f^{-1}((-\infty,\ 0)).$$

Poiché $f \in \Lambda(\mathbb{R})$, sappiamo che $f^{-1}((-\infty,\ 0)) \in \Lambda$.
Nel caso in cui $a < 0$, vale che:

$$\left(\frac{1}{f}\right)^{-1}((-\infty,\ a)) = \left\{x \in X:\ \frac{1}{f(x)} < a\right\} =$$

$$\left\{x \in X:\ f(x) < 0,\ \frac{1}{a} < f(x)\right\} = f^{-1}((-\infty,\ a)) \cap f^{-1}\left(\left(\frac{1}{a},\ +\infty\right)\right).$$

Poiché $f \in \Lambda(\mathbb{R})$, vale che $f^{-1}((-\infty,\ a))$ e $f^{-1}\left(\left(\frac{1}{a},\ +\infty\right)\right)$ appartengono a Λ e anche la loro intersezione appartiene a Λ, poiché Λ é una σ-algebra.

$\square$

Proposizione 4.18. *Dati $f,\ g \in \Lambda(\mathbb{R})$, allora:*

1. $f + g \in \Lambda(\mathbb{R})$*;*

2. $fg \in \Lambda(\mathbb{R})$.

Dimostrazione. 1. Notiamo che:

$$(f+g)^{-1}((-\infty,\ a)) = \{x \in X:\ f(x)+g(x) < a\}.$$

Se x é tale che $f(x)+g(x) < a$, allora $f(x) < a-g(x)$, quindi esiste $r \in \mathbb{Q}$ tale che $f(x) < r < a-g(x)$. Dunque $g(x) < a-r$, allora esiste anche $s \in \mathbb{Q}$ tale che $g(x) < s < a-r$. Riassumendo, esistono $r,\ s \in \mathbb{Q}$ tale che $f(x) < r$, $g(x) < s$ e $r+s < a$. Quindi, posto:

$$I = \{(r,s) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}:\ r+s < a\},$$

risulta che:

$$\{x \in X:\ f(x){+}g(x) < a\} \subset \bigcup_{(r,s)\in I} (\{x \in X:\ f(x) < r\} \cap \{x \in X:\ g(x) < s\}).$$

Inoltre dati $(r,s) \in I$, se $f(x) < r$ e $g(x) < s$, segue che $f(x)+g(x) < r+s < a$, quindi:

$$\{x \in X:\ f(x){+}g(x) < a\} \supset \cup_{(r,s)\in I} (\{x \in X:\ f(x) < r\} \cap \{x \in X:\ g(x) < s\}).$$

In conclusione:

$$(f+g)^{-1}((-\infty,\ a)) = \cup_{(r,s)\in I} (\{x \in X:\ f(x) < r\} \cap \{x \in X:\ g(x) < s\}),$$

ovvero:

$$(f+g)^{-1}((-\infty,\ a)) = \cup_{(r,s)\in I} \left(f^{-1}((-\infty,\ r)) \cap g^{-1}((-\infty,\ s))\right). \quad (4.15)$$

Gli insiemi $f^{-1}((-\infty,\ r))$, $g^{-1}((-\infty,\ s))$ appartengono a Λ in quanto per ipotesi sappiamo che $f,\ g \in \Lambda(\mathbb{R})$. Allora anche la loro intersezione appartiene a Λ poiché Λ é una σ-algebra. L'insieme I ha cardinalitá al piú uguale a quella di $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, cioé ha cardinalitá al piú numerabile. Possiamo allora concludere che l'unione al piú numerabile in (5.56) é contenuta in Λ. Abbiamo mostrato che $(f+g)^{-1}((-\infty,\ a)) \in \Lambda$ e, dalla Proposizione 4.13, ció implica che $f+g \in \Lambda(\mathbb{R})$.

2. Siano $f,\ g \in \Lambda(\mathbb{R})$. Notiamo che:

$$(f(x)+g(x))^2 - f(x)^2 + g(x)^2 = 2f(x)g(x),$$

quindi:

$$fg = \frac{1}{2}\{(f+g)^2 - [f^2+g^2]\}.$$

Dal punto 1 e dalla Proposizione 4.17 segue che $\frac{1}{2}\{(f+g)^2 - [f^2+g^2]\} \in \Lambda(\mathbb{R})$.

□

Proposizione 4.19. *Sia* $f \in \Lambda(\mathbb{R})$*, allora:*

1. $f \vee 0 \in \Lambda(\mathbb{R})$*;*
2. $(-f) \vee 0 \in \Lambda(\mathbb{R})$*;*
3. $|f| \in \Lambda(\mathbb{R})$.

Dimostrazione.

1. Notiamo che:
$$(f \vee 0)(x) = f(x) \vee 0 = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \geq 0; \\ 0 & \text{se } f(x) < 0, \end{cases}$$
$$(f\ 1_{\{f>0\}})(x) = f(x)1_{\{f\geq 0\}}(x) = \begin{cases} f(x)1 = f(x) & \text{se } f(x) \geq 0; \\ f(x)\cdot 0 = 0 & \text{se } f(x) < 0, \end{cases}$$
quindi $f \vee 0 = f\ 1_{\{f\geq 0\}}$. Se $f \in \Lambda(\mathbb{R})$, dalla Proposizione 4.16 segue che $1_{\{f\geq 0\}} \in \Lambda(\mathbb{R})$, dunque dalla Proposizione 4.18 segue che $f\ 1_{\{f\geq 0\}} \in \Lambda(\mathbb{R})$.

2. Notiamo che:
$$((-f) \vee 0)(x) = (-f)(x) \vee 0 = (-f(x)) \vee 0 = \begin{cases} -f(x) & \text{se } f(x) < 0; \\ 0 & \text{se } f(x) \geq 0, \end{cases}$$
$$((-f)\cdot 1_{\{f<0\}})(x) = (-f)(x)1_{\{f<0\}}(x) = \begin{cases} -f(x)\cdot 1 & = -f(x) & \text{se } f(x) < 0; \\ -f(x)\cdot 0 & = 0 & \text{se } f(x) \geq 0, \end{cases}$$
quindi $(-f) \vee 0 = (-f) \cdot 1_{\{f<0\}}$. Se $f \in \Lambda(\mathbb{R})$, dalla Proposizione 4.16 segue che $1_{\{f<0\}} \in \Lambda(\mathbb{R})$ e dalla Proposizione 4.17 segue che $-f \in \Lambda(\mathbb{R})$. Dunque dalla Proposizione 4.18 segue che $-f \cdot 1_{\{f<0\}} \in \Lambda(\mathbb{R})$.

3. Data f, notiamo che:
$$|f|(x) = |f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \geq 0; \\ -f(x) & \text{se } f(x) < 0, \end{cases}$$
inoltre:
$$\begin{aligned} ([f \vee 0] + [(-f) \vee 0])\,(x) &= [f(x) \vee 0] + [(-f(x)) \vee 0] \\ &= \begin{cases} f(x) + 0 & = f(x) & \text{se } f(x) \geq 0; \\ 0 + (-f(x)) & = -f(x) & \text{se } f(x) < 0, \end{cases} \end{aligned}$$
Dunque:
$$|f| = [f \vee 0] + [(-f) \vee 0].$$
Se $f \in \Lambda(\mathbb{R})$, dal punto 1 e 2 di questa Proposizione segue che $f \vee 0$, $(-f) \vee 0 \in \Lambda(\mathbb{R})$. Infine, dalla Proposizione 4.17 segue che $[f \vee 0] + [(-f) \vee 0] \in \Lambda(\mathbb{R})$.

□

Proposizione 4.20. *Siano $f,\ g \in \Lambda(\mathbb{R})$, allora:*

1. $f \vee g \in \Lambda(\mathbb{R})$;
2. $f \wedge g \in \Lambda(\mathbb{R})$.

Dimostrazione. 1. Dati $f,\ g$, notiamo che:

$$(f \vee g)(x) = f(x) \vee g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \geq g(x); \\ g(x) & \text{se } f(x) < g(x), \end{cases}$$

inoltre:

$$\{[(f-g) \vee 0] + g\}(x) = [(f(x) - g(x)) \vee 0] + g(x)$$

$$= \begin{cases} [f(x) - g(x)] + g(x) & = f(x) & \text{se } f(x) \geq g(x); \\ [0] + g(x) & = g(x) & \text{se } f(x) < g(x), \end{cases}$$

Dunque:

$$f \vee g = [(f-g) \vee 0] + g.$$

Se $g \in \Lambda(\mathbb{R})$, dalla Proposizione 4.18 segue che $-g \in \Lambda(\mathbb{R})$. Se anche $f \in \Lambda(\mathbb{R})$, dalla Proposizione 4.18 segue che $f - g = f + (-g) \in \Lambda(\mathbb{R})$. Allora dalla Proposizione 4.19 segue che $(f-g) \vee 0 \in \Lambda(\mathbb{R})$ e di nuovo dalla Proposizione 4.18 segue che $[(f-g) \vee 0] + g \in \Lambda(\mathbb{R})$.

2. Dati $f,\ g$, notiamo che:

$$(f \wedge g)(x) = f(x) \wedge g(x) = \begin{cases} g(x) & \text{se } f(x) \geq g(x); \\ f(x) & \text{se } f(x) < g(x), \end{cases}$$

inoltre:

$$-\{[-(f-g) \vee 0] + g\}(x) = -\{[-(f(x) - g(x)) \vee 0]\} + g(x)$$

$$= \begin{cases} -\{0\} + g(x) & = g(x) & \text{se } f(x) \geq g(x); \\ -\{-(f(x) - g(x))\} + g(x) & = f(x) & \text{se } f(x) < g(x), \end{cases}$$

Dunque:

$$f \wedge g = -\{[-(f-g)] \vee 0\} + g.$$

Se $g \in \Lambda(\mathbb{R})$, dalla Proposizione 4.18 segue che $-g \in \Lambda(\mathbb{R})$. Se anche $f \in \Lambda(\mathbb{R})$, dalla Proposizione 4.18 segue che $f - g = f + (-g) \in \Lambda(\mathbb{R})$ e ancora dalla Proposizione 4.17 che $-(f-g) \in \Lambda(\mathbb{R})$. Allora dalla Proposizione 4.19 segue che $[-(f-g)] \vee 0 \in \Lambda(\mathbb{R})$. Dalla Proposizione 4.17 segue che $-\{[-(f-g) \vee 0]\} \in \Lambda(\mathbb{R})$ e infine dalla Proposizione 4.18 $-\{[-(f-g)] \vee 0\} + g \in \Lambda(\mathbb{R})$.

□

Proposizione 4.21. *Date $f_k : X \longrightarrow \mathbb{R}$, per $k \in \mathbb{N}$, supponiamo che:*

- $\inf_{k\geq 1} f_k(x) \in \mathbb{R}$ *per ogni* $x \in X$*;*
- $f_k \in \Lambda(\mathbb{R})$ *per ogni* $k \in \mathbb{N}$*.*

Allora:

$$\inf_{k\geq 1} f_k \in \Lambda(\mathbb{R}).$$

Dimostrazione. Per ogni $a \in \mathbb{R}$ vale che:

$$\left(\inf_{k\geq 1} f_k\right)^{-1}((-\infty,\ a)) = \{x \in X :\ \inf_{k\geq 1} f_k(x) < a\}.$$

Mostriamo ora che:

$$\left(\inf_{k\geq 1} f_k\right)^{-1}((-\infty,\ a)) = \cup_{k\geq 1}^{+\infty} f_k^{-1}((-\infty,\ a)). \tag{4.16}$$

Se $\inf_{k\geq 1} f_k(x) < a$, allora esiste $\tilde{k} \geq 1$ tale che $f_{\tilde{k}}(x) < a$, cioé $x \in f_{\tilde{k}}^{-1}((-\infty,\ a))$, quindi $x \in \cup_{k\geq 1}^{+\infty} f_k^{-1}((-\infty,\ a))$. Se $x \in \cup_{k\geq 1}^{+\infty} f_k^{-1}((-\infty,\ a))$, allora esiste $\tilde{k} \geq 1$ tale che $f_{\tilde{k}}^{-1}((-\infty,\ a))$, cioé $\inf_{k\geq 1} f_k(x) \leq f_{\tilde{k}}(x) < a$.

Per ipotesi $f_k \in \Lambda(\mathbb{R})$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, quindi per ogni $k \in \mathbb{N}$ vale che $f_k^{-1}((-\infty,\ a)) \in \Lambda$. Poiché Λ é una σ-algebra, $\cup_{k\geq 1}^{+\infty} f_k^{-1}((-\infty,\ a)) \in \Lambda$ per ogni $a \in \mathbb{R}$, quindi da (4.16) segue che $\left(\inf_{k\geq 1} f_k\right)^{-1}((-\infty,\ a))$ per ogni $a \in \mathbb{R}$ e dalla Proposizione 4.13 segue la tesi. □

Proposizione 4.22. *Date $f_k : X \longrightarrow \mathbb{R}$, per $k \in \mathbb{N}$, supponiamo che:*

- $\sup_{k\geq 1} f_k(x) \in \mathbb{R}$ *per ogni* $x \in X$*;*
- $f_k \in \Lambda(\mathbb{R})$ *per ogni* $k \in \mathbb{N}$*.*

Allora:

$$\sup_{k\geq 1} f_k \in \Lambda(\mathbb{R}).$$

Dimostrazione. Per ogni $a \in \mathbb{R}$ vale che:

$$\left(\sup_{k\geq 1} f_k\right)^{-1}((-\infty,\ a]) = \{x \in X :\ \sup_{k\geq 1} f_k(x) \leq a\}.$$

Mostriamo ora che:

$$\left(\sup_{k\geq 1} f_k\right)^{-1}((-\infty,\ a]) = \cap_{k\geq 1}^{+\infty} f_k^{-1}((-\infty,\ a]). \tag{4.17}$$

Se x é tale che $\sup_{k\geq 1} f_k(x) \leq a$, allora per ogni $k \geq 1$ vale che $f_k(x) \leq a$, cioé $x \in f_k^{-1}((-\infty,\ a])$, quindi $x \in \cap_{k\geq 1}^{+\infty} f_k^{-1}((-\infty,\ a])$. Se $x \in \cap_{k\geq 1}^{+\infty} f_k^{-1}((-\infty,\ a])$, allora per ogni $k \geq 1$ vale che $x \in f_k^{-1}((-\infty,\ a])$, cioé $f_k(x) \leq a$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, ovvero $\sup_{k\geq 1} f_k(x) \leq a$.

Per ipotesi $f_k \in \Lambda(\mathbb{R})$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, quindi dalla Proposizione 4.13 segue che $f_k^{-1}((-\infty,\ a]) \in \Lambda$. Poiché Λ é una σ-algebra, $\cap_{k\geq 1}^{+\infty} f_k^{-1}((-\infty,\ a]) \in \Lambda$, per ogni $a \in \mathbb{R}$, e da (4.17) e dalla Proposizione 4.13 segue la tesi. □

Proposizione 4.23. *Date* $f_k : X \longrightarrow \mathbb{R}$*, per* $k \in \mathbb{N}$*, supponiamo che:*

1. $\inf_{k\geq m} f_k(x) \in \mathbb{R}$ *per ogni* $m \in \mathbb{N}$ *e per ogni* $x \in X$*;*
2. $f_k \in \Lambda(\mathbb{R})$ *per ogni* $k \in \mathbb{N}$*;*
3. $\sup_{m\geq 1} \inf_{k\geq m} f_k(x) \in \mathbb{R}$ *per ogni* $x \in X$*;*

Allora:

$$\liminf_{k\to+\infty} f_k = \sup_{m\geq 1} \inf_{k\geq m} f_k \in \Lambda(\mathbb{R}).$$

Dimostrazione. Dalla Proposizione 4.21 segue che per ogni $m \in \mathbb{N}$:

$$\inf_{k\geq m} f_k \in \Lambda(\mathbb{R}).$$

Allora possiamo applicare a $\inf_{k\geq m} f_k$ la Proposizione 4.22 e otteniamo la tesi. □

Proposizione 4.24. *Date* $f_k : X \longrightarrow \mathbb{R}$*, per* $k \in \mathbb{N}$*, supponiamo che:*

1. $\sup_{k\geq m} f_k(x) \in \mathbb{R}$ *per ogni* $m \in \mathbb{N}$ *e per ogni* $x \in X$*;*
2. $f_k \in \Lambda(\mathbb{R})$ *per ogni* $k \in \mathbb{N}$*;*
3. $\inf_{m\geq 1} \sup_{k\geq m} f_k(x) \in \mathbb{R}$ *per ogni* $x \in X$*;*

Allora:

$$\limsup_{k\to+\infty} f_k = \inf_{m\geq 1} \sup_{k\geq m} f_k \in \Lambda(\mathbb{R}).$$

Dimostrazione. Dalla Proposizione 4.22 segue che per ogni $m \in \mathbb{N}$:

$$\sup_{k\geq m} f_k \in \Lambda(\mathbb{R}).$$

Allora possiamo applicare a $\sup_{k\geq m} f_k$ la Proposizione 4.21 e otteniamo la tesi. □

Osservazione 4.25. Sia X un insieme, $\mu : \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0, +\infty]$ una misura su X e $\mathcal{M}$ la collezione dei sottoinsiemi di X μ-misurabili. Se consideriamo $\Lambda = \mathcal{M}$, allora $\Lambda(\mathbb{R})$ coincide con l'insieme delle funzioni μ-misurabili e le proposizioni precedenti ci descrivono le proprietá delle funzioni μ-misurabili.

Osservazione 4.26. Sia X uno spazio metrico e $\mathcal{B}(X)$ la σ-algebra di Borel. Se consideriamo $\Lambda = \mathcal{B}(X)$, $\Lambda(\mathbb{R})$ é l'insieme delle funzioni Boreliane e le proposizioni precedenti ci descrivono le proprietá di tali funzioni.

Sia X un insieme e Λ una σ-algebra di sottoinsiemi di X. Ricordiamo che per $k \geq 1$ intero abbiamo definito l'insieme:

$$\Lambda(\mathbb{R}^k) = \{f : X \longrightarrow \mathbb{R}^k : f^{-1}(A) \in \Lambda \text{ per ogni aperto } A \subset \mathbb{R}^k\}.$$

Proposizione 4.27. *Sia $g : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua e sia $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^k$, $f \in \Lambda(\mathbb{R}^k)$. Allora $g \circ f \in \Lambda(\mathbb{R})$.*

Dimostrazione. Sia A un aperto di $\mathbb{R}$, allora $(g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}(g^{-1}(A)) \in \Lambda$. Infatti, A é un aperto di $\mathbb{R}$ e g una funziona continua, quindi $g^{-1}(A)$ é un aperto di $\mathbb{R}^k$ e allora poiché $f \in \Lambda(\mathbb{R}^k)$ segue che $f^{-1}(g^{-1}(A)) \in \Lambda$. □

Come conseguenza di questa proposizione abbiamo che la componente i-esima di una funzione di $\Lambda(\mathbb{R}^k)$ appartiene a $\Lambda(\mathbb{R})$. Infatti, sia $\pi_i : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$ la proiezione sulla i-esima componente, ovvero $\pi_i(x) = x_i$. La funzione π_i é continua, quindi data $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^k$, $f \in \Lambda(\mathbb{R}^k)$, segue che $\pi_i \circ f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ appartiene a $\Lambda(\mathbb{R})$.

Corollario 4.28. *Sia $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^k$, $f \in \Lambda(\mathbb{R}^k)$. Indichiamo con $\pi_i : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$ la proiezione sulla i-esima componente, ovvero $\pi_i(x) = x_i$. Allora $\pi_i \circ f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ appartiene a $\Lambda(\mathbb{R})$.*

Vediamo che vale anche il viceversa. Dobbiamo peró prima dimostrare un Lemma preliminare:

Lemma 4.29. *Ogni aperto non vuoto A di $\mathbb{R}^k$ é unione numerabile di rettangoli con estremi razionali. Piú precisamente, esistono due successioni $\{p^j\}_{j\in\mathbb{N}}$, $\{q^j\}_{j\in\mathbb{N}}$, con p^j, $q^j \in \mathbb{Q}^k$, tali che $p_i^j < q_i^j$ per ogni $i = 1, ..., k$, $j \in \mathbb{N}$ e*

$$\cup_{j=1}^{+\infty} \Pi_{i=1}^k (p_i^j,\ q_i^j) = A.$$

Dimostrazione. Poiché A é un aperto, per ogni $x \in A$ esiste $\epsilon > 0$ tale che $\mathcal{B}(x, \epsilon) \subset A$, ovvero per ogni y tale che $|y - x| < \epsilon$ vale che $y \in A$. Notiamo che:

$$|y - x|^2 = \sum_{i=1}^k (y_i - x_i)^2,$$

quindi se scegliamo $y \in \mathbb{R}^k$ tale che $(y_i - x_i)^2 < \frac{\epsilon^2}{k}$ per ogni $i = 1, ..., k$, allora $|y - x| < \epsilon$, ovvero $y \in A$. Scegliamo dunque $a_i,\ b_i \in \mathbb{Q}$ tale che:

$$x_i - \frac{\epsilon}{\sqrt{k}} < a_i < x_i < b_i < x_i + \frac{\epsilon}{\sqrt{k}}.$$

Per quanto detto prima vale che:

$$x \in \Pi_{i=1}^k (a_i,\ b_i) \subset A.$$

Definiamo ora:

$$I(A) = \{(a,\ b) \in \mathbb{Q}^k \times \mathbb{Q}^k : \Pi_{i=1}^k (a_i,\ b_i) \subset A\}.$$

Poiché $I(A) \subset \mathbb{Q}^k \times \mathbb{Q}^k$, la cardinalitá di $I(A)$ é al piú numerabile. Osserviamo che:

$$\cup_{(a,b)\in I(A)} \Pi_{i=1}^k (a_i,\ b_i) \subset A. \tag{4.18}$$

Inoltre, per ogni $x \in A$ esiste $(a,\ b) \in I(A)$ tale che $x \in \Pi_{i=1}^k (a_i,\ b_i)$ quindi:

$$\cup_{(a,b)\in I(A)} \Pi_{i=1}^k (a_i,\ b_i) \supset A. \tag{4.19}$$

In conclusione:

$$\cup_{(a,b)\in I(A)} \Pi_{i=1}^k (a_i,\ b_i) = A. \tag{4.20}$$

□

Proposizione 4.30. *Sia $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^k$ tale che $\pi_i \circ f \in \Lambda(\mathbb{R})$ per ogni $i = 1, ..., k$. Allora $f \in \Lambda(\mathbb{R}^k)$.*

Dimostrazione. Siano $a_1, ..., a_k, b_1, ..., b_k$ numeri reali tali che $a_i < b_i$ per ogni $i = 1, ..., k$. Allora:

$$f^{-1}\left(\Pi_{i=1}^k (a_i,\ b_i)\right) = \cap_{i=1}^k (\pi_i \circ f)^{-1}\left((a_i,\ b_i)\right). \tag{4.21}$$

Infatti:

$$f^{-1}\left(\Pi_{i=1}^k (a_i,\ b_i)\right) = \{x \in X :\ f(x) \in \Pi_{i=1}^k (a_i,\ b_i)\} =$$

$$\{x \in X :\ (\pi_i \circ f)(x) \in (a_i,\ b_i)\ \forall i = 1, ..., k\} = \cap_{i=1}^k \{x \in X :\ (\pi_i \circ f)(x) \in (a_i,\ b_i)\}$$

$$= \cap_{i=1}^k (\pi_i \circ f)^{-1}\left((a_i,\ b_i)\right).$$

Poiché per ipotesi $\pi \circ f \in \Lambda(\mathbb{R})$, segue che $(\pi_i \circ f)^{-1}((a_i,\ b_i)) \in \Lambda$. L'insieme Λ é una σ-algebra, quindi contiene anche l'intersezione di tale insiemi. In conclusione, da (4.21) otteniamo che $f^{-1}(\Pi_{i=1}^k (a_i,\ b_i)) \in \Lambda$ per ogni $a_1, ..., a_k, b_1, ..., b_k$ numeri reali tali che $a_i < b_i$ per ogni $i = 1, ..., k$.

Sia ora un aperto $A \subset \mathbb{R}^k$. Dal Lemma 4.29, sappiamo che esistono due successioni $\{p^j\}_{j\in\mathbb{N}}$, $\{q^j\}_{j\in\mathbb{N}}$, con $p^j,\ q^j \in \mathbb{Q}^k$, tali che $p_i^j < q_i^j$ per ogni $i = 1, ..., k,\ j \in \mathbb{N}$ e

$$\cup_{j=1}^{+\infty} \Pi_{i=1}^k (p_i^j,\ q_i^j) = A.$$

Allora:

$$f^{-1}(A) = f^{-1}\left(\cup_{j=1}^{+\infty} \Pi_{i=1}^k (p_i^j,\ q_i^j)\right) = \cup_{j=1}^{+\infty} f^{-1}\left(\Pi_{i=1}^k (p_i^j,\ q_i^j)\right).$$

Per quanto visto prima sappiamo che $f^{-1}\left(\Pi_{i=1}^k (p_i^j,\ q_i^j)\right) \in \Lambda$ per ogni $j = 1, ..., +\infty$ e poiché Λ é una σ-agebra anche l'unione di tali insiemi appartiene a Λ. Abbiamo cosí dimostrato che $f^{-1}(A) \in \Lambda$ per ogni A aperto di $\mathbb{R}^k$ e segue la tesi. □

Proposizione 4.31. *Sia* $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^k,\ f \in \Lambda(\mathbb{R}^k)$ *. Allora* $|f| : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *appartiene a* $\Lambda(\mathbb{R})$*.*

Dimostrazione. Notiamo che:

$$|f|^2 = \sum_{i=1}^k (\pi_i \circ f)^2.$$

Poiché $f \in \Lambda(\mathbb{R}^k)$, sappiamo che ogni sua componente $\pi \circ f$, per ogni $i = 1, ..., k$, appartiene a $\Lambda(\mathbb{R})$. Dalla Proposizione 4.17 segue che $(\pi_i \circ f)^2 \in \Lambda(\mathbb{R})$, per ogni $i = 1, ..., n$, e dalla Proposizione 4.18 segue che $\sum_{i=1}^k (\pi_i \circ f)^2 \in \Lambda(\mathbb{R})$. Definiamo la funzione $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$:

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0; \\ \sqrt{t} & \text{se } t \geq 0, \end{cases}$$

Poiché g econtinua, dalla Proposizione 4.27 segue che $g \circ (\sum_{i=1}^k (\pi_i \circ f)^2) \in \Lambda(\mathbb{R})$. Poiché $g(t) = \sqrt{t}$ per $t \geq 0$, allora:

$$g \circ \left(\sum_{i=1}^k (\pi_i \circ f)^2\right) = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^k (\pi_i \circ f)^2\right)} = |f|$$

e segue la tesi. □

Proposizione 4.32. *Sia* $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^k$*. Supponiamo che esista* $I \subset \mathbb{N}$ *tale che per ogni* $n \in I$ *esistano* $E_n \subset \Lambda,\ g_n : X \longrightarrow \mathbb{R}^k,\ g_n \in \Lambda(\mathbb{R}^k)$ *tali che* $f = g_n$ *su* E_n *e* $\cup_{n\in I} E_n = X$*. Allora* $f \in \Lambda(\mathbb{R}^k)$*.*

Dimostrazione. Sia A un aperto di $\mathbb{R}^k$. Poiché $X = \cup_{n\in I} E_n$ risulta:

$$f^{-1}(A) = \{x \in X : f(x) \in A\} = \cup_{n\in I}\{x \in E_n : \ f(x) \in A\}.$$

Su E_n f coincide con g_n, dunque:

$$f^{-1}(A) = \cup_{n\in I}\{x \in E_n : \ g_n(x) \in A\} = \cup_{n\in I}[E_n \cap g_n^{-1}(A)].$$

Per ipotesi $E_n \in \Lambda$ e $g_n \in \Lambda(\mathbb{R})$, quindi $g_n^{-1}(A) \in \Lambda$. Λ é una σ-algebra ed é chiusa rispetto all'intersezione e all'unione numerabile, quindi $\cup_{n\in I}[E_n \cap g_n^{-1}(A)] \in \Lambda$. In conclusione, abbiamo mostrato che $f^{-1}(A) \in \Lambda$ per ogni A aperto di $\mathbb{R}$ e segue la tesi. □

Corollario 4.33. *Siano X un insieme, $\mu : \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0, \ +\infty]$ una misura su X e $\mathcal{M}$ la collezione degli insiemi μ-misurabili. Sia $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^k$ e supponiamo che esista $I \subset \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \in I$ esistono $E_n \in \mathcal{M}$ e $g_n : X \longrightarrow \mathbb{R}^k$ funzioni μ-misurabili tali che $g = f_n$ su E_n e inoltre $X = \cup_{n\in I} E_n$. Allora f é una funzione μ-misurabile.*

Dimostrazione. Basta applicare la Proposizione precedente prendendo $\Lambda = \mathcal{M}$. □

Corollario 4.34. *Siano X uno spazio metrico e $B(X)$ la σ-algebra di Borel di X. Sia $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^k$ e supponiamo che esista $I \subset \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \in I$ esistono $E_n \in \mathcal{M}$ e $g_n : X \longrightarrow \mathbb{R}^k$ funzioni boreliane tali che $g = f_n$ su E_n e inoltre $X = \cup_{n\in I} E_n$. Allora f é una funzione boreliana.*

Dimostrazione. Basta applicare la Proposizione precedente prendendo $\Lambda = B(X)$. □

Capitolo 5

Push forward di misure e alcune applicazioni.

5.1 Push forward di una misura.

Definizione 5.1. Siano X, Y due insiemi e $f : X \to Y$ un'applicazione. Sia μ una misura su X, ovvero μ verifica le due condizioni:

1. $\mu(\emptyset) = 0$;
2. se $A \subset \cup_{i=1}^{+\infty} A_i \subset X$, allora $\mu(A) \leq \sum_{i=1}^{+\infty} \mu(A_i)$.

La misura *push forward di* μ, che si indica con $f_\sharp\mu$, é la misura su Y definita da:

$$(f_\sharp\mu)(B) := \mu(f^{-1}(B)) \text{ per ogni } B \in \mathcal{P}(Y). \tag{5.1}$$

Controlliamo che $f_\sharp\mu$ definita da (5.1) é una misura su Y, ovvero che:

$$f_\sharp\mu : \mathcal{P}(Y) \to [0, +\infty]$$

e verifica le proprietá:

1. $f_\sharp\mu(\emptyset) = 0$;
2. se $B \subset \cup_{i=1}^{+\infty} B_i \subset Y$, allora $f_\sharp\mu(B) \leq \sum_{i=1}^{+\infty} f_\sharp\mu(B_i)$.

Verifica:

1. $f_\sharp\mu(\emptyset) = \mu(f^{-1}(\emptyset)) = \mu(\emptyset) = 0$ in quanto μ é una misura su X;

2. se $B \subset \cup_{i=1}^{+\infty} B_i \subset Y$, allora
$$f^{-1}(B) \subset f^{-1}(\cup_{i=1}^{+\infty} B_i) = \cup_{i=1}^{+\infty} f^{-1}(B_i).$$
Poiché μ é una misura su X:
$$f_\sharp \mu(B) = \mu(f^{-1}(B)) \leq \sum_{i=1}^{+\infty} \mu(f^{-1}(B_i)) = \sum_{i=1}^{+\infty} f_\sharp \mu(B_i).$$

Lemma 5.2. *Sia $f : X \to Y$ una funzione e $a \in X$. Assegniamo su X la misura $\mu = \delta_a$. Allora:*
$$f_\sharp \delta_a = \delta_{f(a)}. \tag{5.2}$$

Dimostrazione. Vediamo come agisce la misura $f_\sharp \delta_a$ su $\mathcal{P}(Y)$. Sia $E \subset Y$. Allora:
$$f_\sharp \delta_a(E) = \delta_a(f^{-1}(E)) = \begin{cases} 1 & \text{se } a \in f^{-1}(E); \\ 0 & \text{se } a \notin f^{-1}(E). \end{cases} \tag{5.3}$$
Poiché $a \in f^{-1}(E) \Leftrightarrow f(a) \in E$ segue:
$$f_\sharp \delta_a(E) = \begin{cases} 1 & \text{se } f(a) \in E; \\ 0 & \text{se } f(a) \notin E. \end{cases} \tag{5.4}$$
Notiamo che:
$$\delta_{f(a)}(E) = \begin{cases} 1 & \text{se } f(a) \in E; \\ 0 & \text{se } f(a) \notin E. \end{cases} \tag{5.5}$$
Confrontando (5.4) e (5.5) possiamo affermare che $f_\sharp \delta_a(E) = \delta_{f(a)}(E)$ per ogni $E \subset Y$ e segue la tesi. $\square$

Lemma 5.3. *Siano X e Y due insiemi e $b \in Y$. Assegniamo su X una misura di probabilitá μ, ovvero $\mu(X) = 1$, e sia $f : X \to Y$ la funzione costante $f(x) = b$ per ogni $x \in X$. Allora:*
$$f_\sharp \mu = \delta_b. \tag{5.6}$$

Dimostrazione. Notiamo che per ogni $E \subset Y$ vale:
$$f^{-1}(E) = \begin{cases} X & \text{se } b \in E; \\ \varnothing & \text{se } b \notin E, \end{cases} \tag{5.7}$$
quindi
$$f_\sharp \mu(E) = \mu(f^{-1}(E)) = \begin{cases} \mu(X) = 1 & \text{se } b \in E; \\ \mu(\varnothing) = 0 & \text{se } b \notin E, \end{cases} \tag{5.8}$$
Da (5.8) possiamo concludere che:
$$f_\sharp \mu = \delta_b. \tag{5.9}$$
$\square$

Lemma 5.4. *Siano X e Y due insiemi e $b \in Y$. Assegniamo su X una misura μ finita, ovvero $\mu(X) < +\infty$, e sia $f : X \to Y$ la funzione costante $f(x) = b$ per ogni $x \in X$. Allora:*

$$f_\sharp \mu = \mu(X)\delta_b. \tag{5.10}$$

Dimostrazione. Notiamo che per ogni $E \subset Y$ vale:

$$f^{-1}(E) = \begin{cases} X & \text{se } b \in E; \\ \varnothing & \text{se } b \notin E, \end{cases} \tag{5.11}$$

quindi

$$f_\sharp \mu(E) = \mu(f^{-1}(E)) = \begin{cases} \mu(X) & \text{se } b \in E; \\ \mu(\varnothing) = 0 & \text{se } b \notin E, \end{cases} \tag{5.12}$$

Da (5.12) possiamo concludere che:

$$f_\sharp \mu = \mu(X)\delta_b. \tag{5.13}$$

□

Lemma 5.5. *Siano X un insieme e μ una misura finita su X, ovvero $\mu(X) < +\infty$. Sia*

$$f : X \to \mathbb{R}^k$$

una funzione μ-misurabile tale che:

$$f(X) = \{b_1, ..., b_n\}$$

per opportuni elementi $b_1, ..., b_n \in \mathbb{R}^k$ distinti, con $n \geq 2$. Allora:

$$f_\sharp \mu = \sum_{i=1}^{n} \mu(f^{-1}(\{b_i\}))\delta_{b_i}. \tag{5.14}$$

Dimostrazione. Vediamo come agisce $f_\sharp \mu$. Sia $E \subset \mathbb{R}^k$. Se $E \cap \{b_1, ..., b_n\} = \varnothing$, allora $f^{-1}(E) = \varnothing$ e quindi $\mu(f^{-1}(E)) = \mu(\varnothing) = 0$. Altrimenti, $E \cap \{b_1, ..., b_n\} = \{b_{i_1}, ..., b_{i_p}\}$ per opportuni indici $\{i_1, ..., i_p\} \subset \{1, ..., n\}$ tali che per $r \neq s$ vale $i_r \neq i_s$. In questo caso:

$$f^{-1}(E) = f^{-1}(\{b_{i_1}, ..., b_{i_p}\}) = f^{-1}(\cup_{j=1}^{p}\{b_{i_j}\}) = \cup_{j=1}^{p} f^{-1}(\{b_{i_j}\})),$$

quindi:

$$\mu(f^{-1}(E)) = \mu(\cup_{j=1}^{p} f^{-1}(\{b_{i_j}\})).$$

Proviamo ora che gli insiemi $f^{-1}(\{b_i\})$ sono misurabili. Poiché gli insiemi $\mathbb{R}^k \setminus \{b_i\}$ sono aperti e f é μ-misurabile, allora gli insiemi $f^{-1}(\mathbb{R}^k \setminus \{b_i\})$ sono

μ-misurabili. Vale: $f^{-1}(\mathbb{R}^k \setminus \{b_i\}) = X - f^{-1}(\{b_i\})$, quindi $f^{-1}(\{b_i\})$ sono μ-misurabili. Possiamo allora sfruttare l'additivitá di μ:

$$\mu(f^{-1}(E)) = \mu(\cup_{j=1}^{p} f^{-1}(\{b_{i_j}\})) = \sum_{j=1}^{p} \mu(f^{-1}(\{b_{i_j}\})).$$

In conclusione:

$$f_\sharp\mu(E) = \begin{cases} 0 & \text{se } E \cap \{b_1,...,b_n\} = \varnothing; \\ \sum_{j=1}^{p} \mu(f^{-1}(\{b_{i_j}\})) & \text{se } E \cap \{b_1,...,b_n\} = \{b_{i_1},...,b_{i_p}\}. \end{cases} \tag{5.15}$$

Vediamo come agisce la misura $\sum_{i=1}^{n} \mu(f^{-1}(\{b_i\}))\delta_{b_i}$. Dato $E \subset \mathbb{R}^k$:

$$(\sum_{i=1}^{n} \mu(f^{-1}(\{b_i\}))\delta_{b_i})(E) = \sum_{i=1}^{n} \mu\left(f^{-1}(\{b_i\})\right)\delta_{b_i}(E). \tag{5.16}$$

Se $E \cap \{b_1,...,b_n\} = \varnothing$ allora $\delta_{b_i}(E) = 0$ per ogni $i = 1,...,n$, quindi:

$$\sum_{i=1}^{n} \mu\left(f^{-1}(\{b_i\})\right)\delta_{b_i}(E) = 0. \tag{5.17}$$

Invece, se $E \cap \{b_1,...,b_n\} = \{b_{i_1},...,b_{i_p}\}$ allora:

$$\delta_{b_i}(E) = \begin{cases} 1 \text{ se } i \in \{i_1,...,i_p\}; \\ 0 \text{ se } i \notin \{i_1,...,i_p\}, \end{cases} \tag{5.18}$$

quindi:

$$\sum_{i=1}^{n} \mu\left(f^{-1}(\{b_i\})\right)\delta_{b_i}(E) = \sum_{j=1}^{p} \mu(f^{-1}(\{b_{i_j}\})). \tag{5.19}$$

In conclusione per ogni $E \subset \mathbb{R}^k$:

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} \mu\left(f^{-1}(\{b_i\})\right)\delta_{b_i}(E) = \\ &\begin{cases} 0 & \text{se } E \cap \{b_1,...,b_n\} = \varnothing; \\ \sum_{j=1}^{p} \mu(f^{-1}(\{b_{i_j}\})) & \text{se } E \cap \{b_1,...,b_n\} = \{b_{i_1},...,b_{i_p}\}. \end{cases} \end{aligned} \tag{5.20}$$

Confrontando (5.15) e (5.20) otteniamo la tesi. □

5.2 Misure concentrate su insiemi e misure ristrette a insiemi.

Lemma 5.6. *Siano $I \subset \mathbb{N}$, $E \subset X$ e $\{H_i\}_{i\in I} \subset X$. Allora:*

$$\bigcup_{i\in I}(H_i \cap E) = \left(\bigcup_{i\in I} H_i\right) \cap E.$$

Dimostrazione. Mostriamo che:

$$\bigcup_{i\in I}(H_i \cap E) \subset \left(\bigcup_{i\in I} H_i\right) \cap E.$$

Sia $x \in \bigcup_{i\in I}(H_i \cap E)$, allora esiste $i \in I$ tale che $x \in H_i \cap E$, quindi:

$$\begin{cases} x \in H_i, \\ x \in E, \end{cases}$$

allora:

$$\begin{cases} x \in \bigcup_{i\in I} H_i, \\ x \in E, \end{cases}$$

ovvero $x \in \left(\bigcup_{i\in I} H_i\right) \cap E$.
Mostriamo ora che:

$$\bigcup_{i\in I}(H_i \cap E) \supset \left(\bigcup_{i\in I} H_i\right) \cap E.$$

Sia $x \in \left(\bigcup_{i\in I} H_i\right) \cap E$, allora:

$$\begin{cases} x \in \bigcup_{i\in I} H_i, \\ x \in E, \end{cases}$$

quindi:

$$\begin{cases} \exists\ i_* :\ x \in H_{i_*}, \\ x \in E, \end{cases}$$

dunque $x \in H_{i_*} \cap E \subset \bigcup_{i\in I}(H_i \cap E)$. □

Lemma 5.7. *Siano $E \subset X$ e $H \subset X$. Allora:*

$$E \setminus (H \cap E) = (X \setminus H) \cap E.$$

Dimostrazione. Mostriamo che:

$$E \setminus (H \cap E) \subset (X \setminus H) \cap E.$$

Sia $x \in E \setminus (H \cap E)$, allora:

$$\begin{cases} x \in E, \\ x \notin H \cap E, \end{cases}$$

quindi:

$$\begin{cases} x \in E \subset X, \\ x \notin H, \end{cases}$$

allora:

$$\begin{cases} x \in X \smallsetminus H, \\ x \in E, \end{cases}$$

Ció mostra che $x \in (X \smallsetminus H) \cap E$.
Mostriamo ora l'altra inclusione. Sia $x \in (X \smallsetminus H) \cap E$, allora:

$$\begin{cases} x \in X \smallsetminus H, \\ x \in E \subset X, \end{cases}$$

quindi:

$$\begin{cases} x \notin H, \\ x \in E, \end{cases}$$

allora:

$$\begin{cases} x \notin H \cap E, \\ x \in E, \end{cases}$$

Ció mostra che $x \in E \smallsetminus (H \cap E)$.

□

Proposizione 5.8. *Sia X uno spazio metrico e $E \subset X$. Sia $\mathcal{A}(X)$ l'insieme degli aperti di X, $\mathcal{A}(E)$ l'insieme degli aperti di E, ovvero:*

$$\mathcal{A}(E) = \{A \cap E : \ A \in \mathcal{A}(X)\},$$

e siano $\mathcal{B}(X)$ e $\mathcal{B}(E)$ gli insiemi dei Boreliani di X ed E rispettivamente, ovvero:

$$\mathcal{B}(X) = \bigcap_{\substack{\mathcal{C}\ \sigma-\ \textit{algebra di } X, \\ \mathcal{C} \supset \mathcal{A}(X).}} \mathcal{C},$$

$$\mathcal{B}(E) = \bigcap_{\substack{\mathcal{Z}\ \sigma-\ \textit{algebra di } E, \\ \mathcal{Z} \supset \mathcal{A}(E).}} \mathcal{Z}.$$

Allora:

$$\mathcal{B}(E) \supset \{B \cap E : \ B \in \mathcal{B}(X)\}.$$

Dimostrazione. Sia:

$$\mathcal{F} = \{H \subset X : \ H \cap E \in \mathcal{B}(E)\}.$$

Mostriamo che $\mathcal{F}$ é una σ-algebra su X.

- $X \in \mathcal{F}$, perché $X \cap E = E \in \mathcal{B}(E)$ in quanto $\mathcal{B}(E)$ é una σ-algebra di E;
- $\varnothing \in \mathcal{F}$, perché $\varnothing \cap E = \varnothing \in \mathcal{B}(E)$ in quanto $\mathcal{B}(E)$ é una σ-algebra;
- se $\{H_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$, allora $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} H_n \in \mathcal{F}$. Infatti per ogni $n \in \mathbb{N}$ abbiamo che $H_n \cap E \in \mathcal{B}(E)$ e poiché $\mathcal{B}(E)$ é una σ-algebra segue che $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} (H_n \cap E) \in \mathcal{B}(E)$. Dal Lemma 5.6 abbiamo che:

  $$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (H_n \cap E) = \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} H_n\right) \cap E,$$

  quindi $(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} H_n) \cap E \in \mathcal{B}(E)$ e $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} H_n \in \mathcal{F}$.
- se $H \in \mathcal{F}$ allora $X \setminus H \in \mathcal{F}$. Infatti, se $H \cap E \in \mathcal{B}(E)$, poiché $\mathcal{B}(E)$ é una σ-algebra su E, abbiamo che $E \setminus (H \cap E) \in \mathcal{B}(E)$. Dal Lemma 5.7 abbiamo che:

  $$E \setminus (H \cap E) = (X \setminus H) \cap E,$$

  quindi $(X \setminus H) \cap E \in \mathcal{B}(E)$ e $X \setminus H \in \mathcal{F}$.

Se $A \in \mathcal{A}(X)$, allora $A \cap E \in \mathcal{A}(E) \subset \mathcal{B}(E)$, quindi $A \in \mathcal{F}$. Ció mostra che:

$$\mathcal{F} \supset \mathcal{A}(X).$$

Poiché $\mathcal{F}$ é anche una σ-algebra segue che:

$$\mathcal{F} \supset \mathcal{B}(X).$$

Ció vuol dire che per ogni $B \in \mathcal{B}(X)$ risulta che $B \cap E \in \mathcal{B}(E)$ e abbiamo la tesi. □

Proposizione 5.9. *Sia X uno spazio metrico e sia $E \subset X$. Allora:*

$$\mathcal{B}(E) \subset \{B \cap E : \ B \in \mathcal{B}(X)\}.$$

Dimostrazione. Sia:

$$\mathcal{G} = \{B \cap E : \ B \in \mathcal{B}(X)\}.$$

Mostriamo che $\mathcal{G}$ é una σ-algebra di E.

- $E \in \mathcal{G}$, infatti $E = X \cap E$ e $X \in \mathcal{B}(X)$ poiché $\mathcal{B}(X)$ é una σ-algebra di X.
- $\emptyset \in \mathcal{G}$, infatti $\emptyset = \emptyset \cap E$ e $\emptyset \in \mathcal{B}(X)$ poiché $\mathcal{B}(X)$ é una σ-algebra.
- sia $\{B_n \cap E\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{G}$, ovvero $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{B}(X)$. Dal Lemma 5.6 segue che:
$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (B_n \cap E) = \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) \cap E.$$
Poiché $\mathcal{B}(X)$ é una σ-algebra, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \mathcal{B}(X)$ e quindi $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(B_n \cap E) \in \mathcal{G}$.
- Sia $B \cap E \in \mathcal{G}$ con $B \in \mathcal{B}(X)$, allora $E \smallsetminus (B \cap E) \in \mathcal{G}$. Infatti, dal Lemma 5.7 vale che:
$$E \smallsetminus (B \cap E) = (X \smallsetminus B) \cap E.$$
Poiché $\mathcal{B}(X)$ é una σ-algebra di X segue che $X \smallsetminus B \in \mathcal{B}(X)$, quindi $E \smallsetminus (B \cap E) \in \mathcal{G}$.

Sia $A^* \in \mathcal{A}(E)$, allora esiste $A \in \mathcal{A}(X)$ tale che $A^* = A \cap E$. Poiché $A \in \mathcal{A}(X) \subset \mathcal{B}(X)$, segue che $A^* \in \mathcal{G}$, quindi:
$$\mathcal{A}(E) \subset \mathcal{G}.$$
Abbiamo mostrato che $\mathcal{G}$ é anche una $\sigma-$algebra di E e quindi $\mathcal{B}(E) \subset \mathcal{G}$. □

Mettendo insiemi i risultati delle due proposizioni precedenti otteniamo che:

Proposizione 5.10. *Sia X uno spazio metrico e $E \subset X$. Sia $\mathcal{A}(X)$ l'insieme degli aperti di X, $\mathcal{A}(E)$ l'insieme degli aperti di E, ovvero:*
$$\mathcal{A}(E) = \{A \cap E : \ A \in \mathcal{A}(X)\},$$
e siano $\mathcal{B}(X)$ e $\mathcal{B}(E)$ gli insiemi dei Boreliani di X ed E rispettivamente, ovvero:
$$\mathcal{B}(X) = \bigcap_{\substack{\mathcal{C}\ \sigma\ \text{algebra di}\ X,\\ \mathcal{C} \supset \mathcal{A}(X).}} \mathcal{C},$$
$$\mathcal{B}(E) = \bigcap_{\substack{\mathcal{Z}\ \sigma\ \text{algebra di}\ E,\\ \mathcal{Z} \supset \mathcal{A}(E).}} \mathcal{Z}.$$
Allora:
$$\mathcal{B}(E) = \{B \cap E : \ B \in \mathcal{B}(X)\}.$$

Proposizione 5.11. *Siano X,Y due spazi metrici, $\psi : X \longrightarrow Y$ un'applicazione continua e siano $E \subset X$, $F \subset Y$ tali che $\psi(E) \subset F$. Allora l'applicazione:*

$$\psi|_E : E \longrightarrow F$$

é continua.

Dimostrazione. Dato un insieme $A^* \in \mathcal{A}(F)$, esiste $A \in \mathcal{A}(Y)$ tale che $A^* = A \cap F$. Allora:

$$\begin{aligned}(\psi|_E)^{-1}(A^*) &= E \cap \psi^{-1}(A^*) = E \cap \psi^{-1}(A \cap F) = E \cap [\psi^{-1}(A) \cap \psi^{-1}(F)] \\ &= E \cap [\psi^{-1}(F) \cap \psi^{-1}(A)] = [E \cap \psi^{-1}(F)] \cap \psi^{-1}(A).\end{aligned}$$

Per ipotesi $\psi(E) \subset F$, quindi $E \cap \psi^{-1}(F) = E$ e possiamo concludere che:

$$(\psi|_E)^{-1}(A^*) = E \cap \psi^{-1}(A).$$

L'applicazione ψ é continua e $A \in \mathcal{A}(X)$, quindi $\psi^{-1}(A) \in \mathcal{A}(X)$. Allora $E \cap \psi^{-1}(A) \in \mathcal{A}(E)$ e possiamo concludere che data $A^* \in \mathcal{A}(F)$ vale che $(\psi|_E)^{-1}(A^*) \in \mathcal{A}(E)$, ovvero $\psi|_E$ é un'applicazione continua. $\square$

Proposizione 5.12. *Siano X,Y due spazi metrici, $\psi : X \longrightarrow Y$ un'applicazione Boreliana e siano $E \subset X, F \subset Y$ tali che $\psi(E) \subset F$. Allora l'applicazione:*

$$\psi|_E : E \longrightarrow F$$

é Boreliana.

Dimostrazione. Dato un insieme $A^* \in \mathcal{A}(F)$, esiste $A \in \mathcal{A}(Y)$ tale che $A^* = A \cap F$. Allora:

$$\begin{aligned}(\psi|_E)^{-1}(A^*) &= E \cap \psi^{-1}(A^*) = E \cap \psi^{-1}(A \cap F) = E \cap [\psi^{-1}(A) \cap \psi^{-1}(F)] \\ &= E \cap [\psi^{-1}(F) \cap \psi^{-1}(A)] = [E \cap \psi^{-1}(F)] \cap \psi^{-1}(A).\end{aligned}$$

Per ipotesi $\psi(E) \subset F$, quindi $E \cap \psi^{-1}(F) = E$ e possiamo concludere che:

$$(\psi|_E)^{-1}(A^*) = E \cap \psi^{-1}(A).$$

L'applicazione ψ é Boreliana e inoltre $A \in \mathcal{A}(Y)$, segue che $\psi^{-1}(A) \in \mathcal{B}(X)$ e quindi che $E \cap \psi^{-1}(A) \in \mathcal{B}(E)$. In conclusione, abbiamo mostrato che data $A^* \in \mathcal{A}(F)$ vale che $\psi|_E^{-1}(A^*) \in \mathcal{B}(E)$, ovvero $\psi|_E$ é un'applicazione Boreliana. $\square$

Osservazione 5.13 (Misure concentrate su insiemi). Data la misura μ sullo spazio X:

$$\mu : \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0, +\infty],$$

e dato un sottoinsieme $G \subset X$, definiamo la misura μ concentrata su G:

$$\begin{aligned} &\mu \llcorner G : \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0, +\infty], \\ &(\mu \llcorner G)(E) = \mu(G \cap E) \end{aligned}$$

Verifichiamo che $\mu \llcorner G$ é una misura su X:

- $(\mu \llcorner G)(\varnothing) = 0$. Infatti: $(\mu \llcorner G)(\varnothing) = \mu(G \cap \varnothing) = \mu(\varnothing) = 0$.
- se $A \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$, allora:

  $$(\mu \llcorner G)(A) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} (\mu \llcorner G)(A_n). \tag{5.21}$$

  Infatti, basta notare che $G \cap A \subset G \cap (\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n) = \bigcup_{n=1}^{+\infty} (G \cap A_n)$ (l'ultima uguaglianza segue dal Lemma 5.7) e allora dal fatto che μ é una misura su X segue che:

  $$\mu(G \cap A) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(G \cap A_n). \tag{5.22}$$

  Notiamo che il primo termine di (5.21) coincide con il primo termine di (5.22) e il secondo termine di (5.21) coincide con il secondo termine di (5.22):

  $$\begin{aligned} &(\mu \llcorner G)(A) = \mu(G \cap A), \\ &\textstyle\sum_{n=1}^{+\infty} (\mu \llcorner G)(A_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(G \cap A_n), \end{aligned}$$

  e allora da (5.22) segue (5.21).

Verifichiamo ora che:

$$\mathcal{M}_\mu \subset \mathcal{M}_{\mu \llcorner G}, \tag{5.23}$$

ovvero se $E \in \mathcal{M}_\mu$, allora per ogni $H \subset X$ vale che:

$$(\mu \llcorner G)(H) = (\mu \llcorner G)(H \cap E) + (\mu \llcorner G)(H \setminus E). \tag{5.24}$$

Notiamo che il membro destro di (5.24) si puó riscrivere come:

$$\begin{aligned} (\mu \llcorner G)(H \cap E) + (\mu \llcorner G)(H \setminus E) &= \mu(G \cap (H \cap E)) + \mu(G \cap (H \setminus E)) \\ &= \mu((G \cap H) \cap E) + \mu((G \cap H) \setminus E). \end{aligned}$$

Dal fatto che E é μ misurabile segue che per ogni $B \subset X$:

$$\mu(B) = \mu(B \cap E) + \mu(B \setminus E).$$

Allora basta prendere nella precedente equazione $B = G \cap H$ e otteniamo che:

$$\mu(G \cap H) = \mu((G \cap H) \cap E) + \mu((G \cap H) \setminus E);$$

poiché il membro sinistro coincide con $(\mu \llcorner G)(H)$ otteniamo l'equazione (5.24).

Supponiamo di essere nel caso particolare in cui $\mu = \mathcal{L}^n$. La misura di Lebesgue di $\mathbb{R}^n$ é Boreliana e da (5.23) segue che anche la misura di Lebesgue concentrata su G lo é, infatti:

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{M}_{\mathcal{L}^n} \subset \mathcal{M}_{\mathcal{L}^n \llcorner G}.$$

Osservazione 5.14 (Misure ristrette a insiemi). Data una misura μ su un insieme X:

$$\mu : \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0, +\infty],$$

e dato un sottoinsieme $E \subset X$, definiamo la misura μ ristretta a E:

$$\begin{aligned} &\mu|_E : \mathcal{P}(E) \longrightarrow [0, +\infty] \\ &(\mu|_E)(H) = \mu(H) \text{ per ogni } H \subset E. \end{aligned}$$

Verifichiamo che $\mu|_E$ é una misura su E.

- $\mu|_E(\varnothing) = \mu(\varnothing) = 0.$
- se $A \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \subset E \subset X$, allora:

$$\mu|_E(A) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \mu|_E(A_n). \tag{5.25}$$

  Infatti, la disuguaglianza (5.25) é equivalente alla disuguaglianza:

$$\mu(A) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n), \tag{5.26}$$

  la quale é vera per ogni $A \subset E$ poiché μ é una misura.

Verifichiamo ora che:

$$\mathcal{M}_\mu \cap \mathcal{P}(E) \subset \mathcal{M}_{\mu|_E}.$$

Sia $H \subset X$, $H \in \mathcal{M}_\mu \cap \mathcal{P}(E)$, dobbiamo mostrare che per ogni $Z \subset E \subset X$ vale che:

$$\mu|_E(Z) = \mu|_E(Z \cap H) + \mu|_E(Z \setminus H). \tag{5.27}$$

Poiché $Z \cap H$ e $Z \setminus E$ sono contenuti in E, l'equazione (5.27) é equivalente a:

$$\mu(Z) = \mu(Z \cap H) + \mu(Z \setminus H), \tag{5.28}$$

la quale é valida in quanto $H \in \mathcal{M}_\mu$.

Consideriamo il caso in cui μ é la misura di Lebesgue su $\mathbb{R}^n$ e sia $X \subset \mathbb{R}^n$. Abbiamo giá mostrato che:

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{M}_{\mathcal{L}^n} \subset \mathcal{M}_{\mathcal{L}^n \llcorner X}. \tag{5.29}$$

Dal Lemma 5.10 segue che:

$$\mathcal{B}(X) = \{B \cap X : \ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\},$$

allora per ogni $B' \subset \mathcal{B}(X)$ esiste $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ tale che $B' = B \cap X$. Da (5.29) segue che $B \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}^n \llcorner X}$, dunque:

$$\begin{cases} B' \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}^n \llcorner X}, \\ B' \subset X, \end{cases}$$

quindi $B' \in \mathcal{M}_{(\mathcal{L}^n \llcorner X)|_X}$. Ció prova che:

$$\mathcal{B}(X) \subset \mathcal{M}_{(\mathcal{L}^n \llcorner X)|_X}$$

5.3 Mappe di trasporto ammissibili e alcuni esempi.

Teorema 5.15. *Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Sia $I \subset \mathbb{N}$ tale che $I \neq \varnothing$ e per ogni $i \in I$ esiste un boreliano $B_i \subset \mathbb{R}^n$ tale che $\cup_{i \in I} B_i = \mathbb{R}^n$ e se $i \neq j$ allora $B_i \cap B_j = \varnothing$. Supponiamo che per ogni $i \in I$ esiste un'isometria $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tali che $f = f_i$ su B_i. Supponiamo che esiste un boreliano $B \subset \mathbb{R}^n$ tale che $\mathcal{L}^n(B) = 0$ e per ogni $i \neq j$ vale:*

$$f_i(B_i \setminus B) \cap f_j(B_j \setminus B) = \varnothing. \tag{5.30}$$

Allora, dati E, G boreliani di $\mathbb{R}^n$, gli insiemi $f^{-1}(E)$ e $f_i(G \cap B_i)$ per ogni $i \in I$ sono boreliani di $\mathbb{R}^n$ e vale:

$$\mathcal{L}^n(G \cap f^{-1}(E)) = \mathcal{L}^n(\{\cup_{i \in I} f_i(G \cap B_i)\} \cap E). \tag{5.31}$$

Dimostrazione. Utilizzando il fatto che: $\mathbb{R}^n = \cup_{i \in I} B_i$ e su ogni B_i vale che $f = f_i$ otteniamo:

$$f^{-1}(E) = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \in E\}$$

$$= \{x \in B : f(x) \in E\} \cup [\cup_{i\in I}\{x \in B_i \setminus B : f(x) \in E\}]$$
$$= \{x \in B : f(x) \in E\} \cup [\cup_{i\in I}\{x \in B_i \setminus B : f_i(x) \in E\}]$$
$$= [B \cap f^{-1}(E)] \cup \left[\cup_{i\in I}[(B_i \setminus B) \cap f_i^{-1}(E)]\right].$$

Dal Teorema 3.6 segue che ogni isometria f_i é iniettiva e surgettiva, quindi vale l'uguaglianza:

$$B_i \setminus B = f_i^{-1}(f_i(B_i \setminus B)),$$

da cui segue che:

$$f^{-1}(E) = [B \cap f^{-1}(E)] \cup [\cup_{i\in I}[f_i^{-1}(f_i(B_i \setminus B)) \cap f_i^{-1}(E)]]$$
$$= [B \cap f^{-1}(E)] \cup [\cup_{i\in I} f_i^{-1}(f_i(B_i \setminus B) \cap E)].$$

In conclusione:

$$f^{-1}(E) = [B \cap f^{-1}(E)] \cup \left[\cup_{i\in I} f_i^{-1}\left(f_i(B_i \setminus B) \cap E\right)\right]. \tag{5.32}$$

Sia G un boreliano di $\mathbb{R}^n$.

$$G \cap f^{-1}(E) = G \cap \{[B \cap f^{-1}(E)] \cup [\cup_{i\in I} f_i^{-1}(f_i(B_i \setminus B) \cap E)]\}$$
$$= \{G \cap [B \cap f^{-1}(E)]\} \cup \{G \cap [\cup_{i\in I} f_i^{-1}(f_i(B_i \setminus B) \cap E)]\}$$
$$= \{[G \cap B] \cap f^{-1}(E)\} \cup \{\cup_{i\in I}[G \cap f_i^{-1}(f_i(B_i \setminus B) \cap E)]\}.$$

Poiché f_i é biunivoca, vale $G = f_i^{-1}(f_i(G))$, quindi:

$$G \cap f^{-1}(E) = \{[G \cap B] \cap f^{-1}(E)\} \cup \{\cup_{i\in I}[f_i^{-1}(f_i(G)) \cap f_i^{-1}(f_i(B_i \setminus B) \cap E)]\}$$
$$= \{[G \cap B] \cap f^{-1}(E)\} \cup \{\cup_{i\in I} f_i^{-1}\left(f_i(G) \cap [f_i(B_i \setminus B) \cap E]\right)\}.$$

In conclusione:

$$\begin{gathered} G \cap f^{-1}(E) \\ = \{[G \cap B] \cap f^{-1}(E)\} \cup \{\cup_{i\in I} f_i^{-1}\left(f_i(G) \cap [f_i(B_i \setminus B) \cap E]\right)\}, \end{gathered} \tag{5.33}$$

allora:

$$\begin{gathered} \mathcal{L}^n(G \cap f^{-1}(E)) \\ = \mathcal{L}^n(\{[G \cap B] \cap f^{-1}(E)\} \cup \{\cup_{i\in I} f_i^{-1}\left(f_i(G) \cap [f_i(B_i \setminus B) \cap E]\right)\}). \end{gathered} \tag{5.34}$$

Dall'inclusione:

$$[G \cap B] \cap f^{-1}(E) \subset B$$

e dall'ipotesi:

$$\mathcal{L}^n(B) = 0$$

segue che:

$$\mathcal{L}^n([G \cap B] \cap f^{-1}(E)) = 0. \tag{5.35}$$

Poiché le funzioni f_i sono isometrie di $\mathbb{R}^n$, sono anche iniettive, suriettive e f_i^{-1} é ancora un'isometria (vedi Teorema 3.6 e Teorema 3.11). Allora $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é un omeomorfismo e per ogni boreliano H di $\mathbb{R}^n$ si ha che $f_i(H)$ e $f_i^{-1}(H)$ sono boreliani.
Inoltre, poiché $f = f_i$ su B_i, B_i sono boreliani di $\mathbb{R}^n$, f_i sono funzioni boreliane e $\mathbb{R}^n = \cup_{i \in I} B_i$, la funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é boreliana (vedi Corollario 4.34). Allora il fatto che E é un boreliano ci da che anche $f^{-1}(E)$ é un boreliano. Inoltre $[G \cap B] \cap f^{-1}(E)$ é intersezione finita di boreliani e dunque un boreliano.

Mostriamo ora che l'altro insieme che compare al secondo membro di (5.33) é un boreliano.
Poiché B_i e B sono boreliani e vale:

$$B_i \setminus B = B_i \cap (\mathbb{R}^n \setminus B),$$

l'insieme $B_i \setminus B$ é boreliano. Segue che $f_i(B_i \setminus B)$ é boreliano e $f_i(B_i \setminus B) \cap E$ é boreliano in quanto intersezione di boreliani. Poiché G é boreliano, segue che $f_i(G)$ é boreliano; quindi:

$$f_i(G) \cap [f_i(B_i \setminus B) \cap E]$$

é boreliano in quanto intersezione di boreliani,

$$f_i^{-1}(f_i(G) \cap [f_i(B_i \setminus B) \cap E])$$

é boreliano in quanto f_i é un'applicazione boreliana e infine

$$\cup_{i \in I} f_i^{-1}(f_i(G) \cap [f_i(B_i \setminus B) \cap E])$$

é boreliano in quanto I é un insieme al piú numerabile.

Mostriamo ora che:

$$\{[G \cap B] \cap f^{-1}(E)]\} \cap \{f_i^{-1}\left(f_i(G) \cap [f_i(B_i \setminus B) \cap E]\right)\} = \varnothing. \tag{5.36}$$

Valgono:

$$B \cap (B_i \setminus B) = \varnothing, \tag{5.37}$$

$$[G \cap B] \cap f^{-1}(E) \subset G \cap B \subset B, \tag{5.38}$$

inoltre:

$$f_i^{-1}(f_i(G)\cap[f_i(B_i\setminus B)\cap E])\subset f_i^{-1}(f_i(B_i\setminus B)\cap E)\subset f_i^{-1}(f_i(B_i\setminus B))=B_i\setminus B. \tag{5.39}$$

Da (5.37), (5.38) e (5.39) segue (5.36).

L'uguaglianza (5.36) ci permette di affermare che:

$$\begin{aligned}&\mathcal{L}^n\left(G\cap f^{-1}(E)\right)\\ &=\mathcal{L}^n\left(\{[G\cap B]\cap f^{-1}(E)\}\cup\{\cup_{i\in I}f_i^{-1}\left(f_i(G)\cap[f_i(B_i\setminus B)\cap E]\right)\}\right)\\ &=\mathcal{L}^n\left([G\cap B]\cap f^{-1}(E)\right)+\mathcal{L}^n\left(\cup_{i\in I}f_i^{-1}\left(f_i(G)\cap[f_i(B_i\setminus B)\cap E]\right)\right).\end{aligned}$$

Da (5.35) segue allora che:

$$\mathcal{L}^n\left(G\cap f^{-1}(E)\right)=\mathcal{L}^n\left(\cup_{i\in I}f_i^{-1}\left(f_i(G)\cap[f_i(B_i\setminus B)\cap E]\right)\right).$$

Mostriamo ora che per $i\neq j$:

$$f_i^{-1}\left(f_i(G)\cap[f_i(B_i\setminus B)\cap E]\right)\cap f_j^{-1}\left(f_j(G)\cap[f_j(B_j\setminus B)\cap E]\right)=\varnothing \tag{5.40}$$

Notiamo che:

$$f_i^{-1}(f_i(G)\cap[f_i(B_i\setminus B)\cap E])\subset f_i^{-1}(f_i(B_i\setminus B)\cap E)\subset$$
$$f_i^{-1}(f_i(B_i\setminus B))\subset B_i\setminus B\subset B_i.$$

Poiché per ipotesi sappiamo che $B_i\cap B_j=\varnothing$ per $i\neq j$, vale (5.40).

L'equazione (5.40) ci permette di affermare che:

$$\mathcal{L}^n\left(G\cap f^{-1}(E)\right)=\sum_{i\in I}\mathcal{L}^n\left(f_i^{-1}\left(f_i(G)\cap[f_i(B_i\setminus B)\cap E]\right)\right). \tag{5.41}$$

Le funzioni f_i^{-1} sono isometrie, dunque conservano la misura di Lebesgue:

$$\mathcal{L}^n\left(G\cap f^{-1}(E)\right)=\sum_{i\in I}\mathcal{L}^n\left(f_i(G)\cap[f_i(B_i\setminus B)\cap E]\right). \tag{5.42}$$

Per ipotesi sappiamo che, per $i\neq j$, risulta:

$$f_i(B_i\setminus B)\cap f_j(B_j\setminus B)=\varnothing. \tag{5.43}$$

Vale inoltre che:

$$f_i(G)\cap[f_i(B_i\setminus B)\cap E]\subset f_i(B_i\setminus B)\cap E\subset f_i(B_i\setminus B). \tag{5.44}$$

Da (5.43) e (5.44) segue che per $i \neq j$:

$$\{f_i(G) \cap [f_i(B_i \setminus B) \cap E]\} \cap \{f_j(G) \cap [f_j(B_j \setminus B) \cap E]\} = \emptyset. \tag{5.45}$$

L'uguaglianza (5.45) ci permette di affermare che:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^n \left(G \cap f^{-1}(E)\right) &= \mathcal{L}^n \left(\cup_{i \in I} \left(f_i(G) \cap [f_i(B_i \setminus B) \cap E]\right)\right) \\ &= \mathcal{L}^n \left(\cup_{i \in I} \{[f_i(G) \cap f_i(B_i \setminus B)] \cap E\}\right). \end{aligned}$$

Poiché f_i é iniettiva, per ogni $A, \tilde{A} \subset X$:

$$f_i(A) \cap f_i(\tilde{A}) = f_i(A \cap \tilde{A}),$$

quindi:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^n \left(G \cap f^{-1}(E)\right. &= \mathcal{L}^n \left(\cup_{i \in I} \{f_i(G \cap (B_i \setminus B)) \cap E\}\right) \\ &= \mathcal{L}^n \left(\{\cup_{i \in I} f_i(G \cap [B_i \setminus B])\} \cap E\right). \end{aligned} \tag{5.46}$$

Mostriamo ora che:

$$\mathcal{L}^n(\{\cup_{i \in I} f_i(G \cap (B_i \cap B))\} \cap E) = 0. \tag{5.47}$$

Gli insiemi $G \cap (B_i \cap B)$, $f_i(G \cap (B_i \cap B))$ sono boreliani, inoltre $G \cap (B_i \cap B) \subset B$ e $\mathcal{L}^n(B) = 0$, quindi:

$$\mathcal{L}^n(G \cap (B_i \cap B)) = 0.$$

Poiché f_i conserva la misura di Lebesgue,

$$\mathcal{L}^n(f_i(G \cap (B_i \cap B))) = 0.$$

Anche l'insieme $\cup_{i \in I} f_i(G \cap (B_i \cap B))$ é un boreliano e dalla subadditivitá di μ segue che:

$$\mathcal{L}^n(\cup_{i \in I} f_i(G \cap (B_i \cap B))) = 0.$$

Infine, $\cup_{i \in I} f_i(G \cap (B_i \cap B)) \cap E$ é un boreliano e $\cup_{i \in I} f_i(G \cap (B_i \cap B)) \cap E \subset \cup_{i \in I} f_i(G \cap (B_i \cap B))$ e possiamo concludere che vale (5.47).

Torniamo ora all'equazione (5.47);essa non cambia se gli sommiamo un termine pari a zero come quello in (5.47):

$$\mathcal{L}^n \left(G \cap f^{-1}(E)\right)$$

$$= \mathcal{L}^n \left(\{\cup_{i \in I} f_i(G \cap (B_i \setminus B))\} \cap E\right) + \mathcal{L}^n(\{\cup_{i \in I} f_i(G \cap (B_i \cap B))\} \cap E).$$

Dal Lemma 1.2 segue che:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}^n\left(G\cap f^{-1}(E)\right)\\
&= \mathcal{L}^n\left([\{\cup_{i\in I}f_i(G\cap(B_i\setminus B))\}\cap E]\cup[\{\cup_{i\in I}f_i(G\cap(B_i\cap B))\}\cap E]\right)\\
&= \mathcal{L}^n\left(\{[\cup_{i\in I}f_i(G\cap(B_i\setminus B))]\cup[\cup_{i\in I}f_i(G\cap(B_i\cap B))]\}\cap E\right)\\
&= \mathcal{L}^n\left(\{\cup_{i\in I}[f_i(G\cap(B_i\setminus B))\cup f_i(G\cap(B_i\cap B))]\}\cap E\right)\\
&= \mathcal{L}^n\left(\{\cup_{i\in I}f_i([G\cap(B_i\setminus B)]\cup[G\cap(B_i\cap B)])\}\cap E\right)\\
&= \mathcal{L}^n\left(\{\cup_{i\in I}f_i(G\cap B_i)\}\cap E\right).
\end{aligned}$$

Abbiamo cosí provato che vale (5.31). □

Osservazione 5.16. Supponiamo di essere nelle ipotesi del Teorema 5.15. Sia G un boreliano di $\mathbb{R}^n$ e sia $\mu = \mathcal{L}^n \llcorner G$ la misura di Lebesgue di $\mathbb{R}^n$ concentrata su G, ovvero:

$$\mu(E) = (\mathcal{L}^n \llcorner G)(E) = \mathcal{L}^n(G\cap E),$$

per ogni boreliano E di $\mathbb{R}^n$. Allora:

$$(f_\sharp\mu)(E) = \left(\mathcal{L}^n \llcorner \{\cup_{i\in I}f_i(G\cap B_i)\}\right)(E),$$

per ogni boreliano E di $\mathbb{R}^n$. Infatti, dato un boreliano E di $\mathbb{R}^n$, si ha che:

$$(f_\sharp\mu)(E) = \mu\left(f^{-1}(E)\right) = (\mathcal{L}^n \llcorner G)\left(f^{-1}(E)\right) = \mathcal{L}^n\left(G\cap f^{-1}(E)\right).$$

Dal Teorema 5.15 segue che:

$$(f_\sharp\mu)(E) = \mathcal{L}^n\left(\left\{\bigcup_{i\in I}f_i(G\cap B_i)\right\}\cap E\right) = \left(\mathcal{L}^n \llcorner \left\{\bigcup_{i\in I}f_i(G\cap B_i)\right\}\right)(E),$$

per ogni boreliano $E\subset\mathbb{R}^n$.

Introduciamo la seguente definizione:

Definizione 5.17. Dato un insieme X e date due misure su X, che indichiamo con f_0 e f_1, diciamo che l'applicazione:

$$T:\ X\longrightarrow X$$

é una *mappa di trasposto ammissibile* se:

$$T_\sharp f_0 = f_1.$$

Nei prossimi esempi vediamo alcune mappe di trasposto ammissibili.

Esempio 5.18. Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ un'isometria. Allora, usando la notazione introdotta nel Teorema 5.15, siamo nel caso: $n = 1$, $I = \{1\}$, $B_1 = \mathbb{R}$, $f_1 = f$, $B = \varnothing$. Sia G un boreliano di $\mathbb{R}$ e sia $\mu = \mathcal{L}^1 \llcorner G$ la misura di Lebesgue concentrata su G. Allora, dall'osservazione precedente, segue che:

$$(f_\sharp \mu)(E) = \left(\mathcal{L}^1 \llcorner f(G)\right)(E), \text{ per ogni } E \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

ovvero $f_\sharp \mu$ sui Boreliani di $\mathbb{R}$ é la misura di Lebesgue concentrata su $f(G)$. Nel caso in cui $G = [0,1]$ e vogliamo ottenere $f(G) = [1,2]$, possiamo prendere come isometria la funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ data da $f(x) = x + 1$, oppure la funzione $f(x) = 2 - x$. Dunque, se $f_0 = \mathcal{L}^n \llcorner [0,1]$ e $f_1 = \mathcal{L}^n \llcorner [1,2]$, le mappe e $f(x) = x + 1$ e $f(x) = 2 - x$ sono ammissibili.
Sia m un intero, $m \geq 2$. Nel caso in cui $G = [0,m]$ e vogliamo $f(G) = [1, 1+m]$, possiamo scegliere $f(x) = 1 + x$. Dunque, se $f_0 = \mathcal{L}^n \llcorner [0,m]$ e $f_1 = \mathcal{L}^n \llcorner [1, m+1]$, la mappa $f(x) = 1 + x$ é ammissibile.

Esempio 5.19. Sia m intero, $m \geq 2$ e consideriamo i due boreliani di $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} B_1 &= [0,1) \cup (m, +\infty), \\ B_2 &= (-\infty, 0) \cup [1, m] \end{aligned}$$

e le due isometrie $f_{1,2} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= m + x, \\ f_2(x) &= x. \end{aligned}$$

Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{su } B_1; \\ f_2(x) & \text{su } B_2. \end{cases} \tag{5.48}$$

Verifichiamo che valgono le ipotesi del Teorema 5.15. Siamo nel caso $n = 1$ e $I = \{1; 2\}$. Sicuramente vale che: $B_1 \cup B_2 = \mathbb{R}$ e $B_1 \cap B_2 = \varnothing$. Inoltre, notiamo che:

$$\begin{aligned} f_1(B_1) &= [m, 1+m) \cup (2m, +\infty), \\ f_2(B_2) &= (-\infty, 0) \cup [1, m], \end{aligned}$$

quindi:

$$f_1(B_1) \cap f_2(B_2) = \{m\}.$$

Si ha che:

$$\begin{aligned} f_1^{-1}(\{m\}) &= \{0\}, \\ f_2^{-1}(\{m\}) &= \{m\}. \end{aligned}$$

Se definiamo l'insieme:

$$B = \{0; m\},$$

esso é un boreliano, in quanto unione finita di chiusi, ha misura di Lebesgue nulla e vale che:

$$f_1(B_1 \smallsetminus B) \cap f_2(B_2 \smallsetminus B) = \emptyset.$$

Abbiamo cosí mostrato che valgono tutte le ipotesi del Teorema 5.15.
Sia $G = [0,m]$, allora:

$$\begin{aligned} G \cap B_1 &= [0,m] \cap ([0,1) \cup (m,+\infty)) = ([0,m] \cap [0,1)) \cup ([0,m] \cap (m,+\infty)) = [0,1), \\ G \cap B_2 &= [0,m] \cap ((-\infty,0) \cup [1,m]) = ([0,m] \cap (-\infty,0)) \cup ([0,m] \cap [1,m]) = [1,m]. \end{aligned}$$

Allora:

$$\begin{aligned} \cup_{i\in I} f_i(G \cap B_i) &= f_1(G \cap B_1) \cup f_2(G \cap B_2) \\ &= f_1([0,1)) \cup f_2([1,m]) = [m,1+m) \cup [1,m] = [1,1+m). \end{aligned}$$

Se $\mu = \mathcal{L}^1 \llcorner [0,m]$ é la misura di Lebesgue di $\mathbb{R}$ concentrata su $[0,m]$, dall'Osservazione 5.16 segue che:

$$f_\sharp \mu(E) = \left(\mathcal{L}^1 \llcorner [1,1+m)\right)(E),$$

per ogni boreliano E di $\mathbb{R}$, ovvero $f_\sharp \mu$ sui Boreliani di $\mathbb{R}$ é la misura di Lebesgue di $\mathbb{R}$ concentrata su $[1,1+m]$. Dunque, se $f_0 = \mathcal{L}^n \llcorner [0,m]$ e $f_1 = \mathcal{L}^n \llcorner [1,m+1]$, la mappa definita in (5.48) é ammissibile.

Esempio 5.20. Sia m intero, $m \geq 2$ e sia $0 < \epsilon < 1$. Consideriamo i tre boreliani di $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} B_1 &= [0,1) \cup (m,+\infty), \\ B_2 &= (-\infty,0) \cup [1,m-\epsilon], \\ B_3 &= (m-\epsilon,m]. \end{aligned}$$

e le tre isometrie $f_{1,2,3} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= m - \epsilon + x, \\ f_2(x) &= x, \\ f_3(x) &= 1 + x. \end{aligned}$$

Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{su } B_1; \\ f_2(x) & \text{su } B_2; \\ f_3(x) & \text{su } B_3. \end{cases} \tag{5.49}$$

Verifichiamo che valgono le ipotesi del Teorema 5.15. Siamo nel caso $n = 1$ e $I = \{1;2;3\}$. Notiamo che:

$$\begin{aligned} &B_1 \cup B_2 \cup B_3 = \mathbb{R}, \\ &B_1 \cap B_2 = \emptyset, \\ &B_1 \cap B_3 = \emptyset, \\ &B_2 \cap B_3 = \emptyset. \end{aligned}$$

Inoltre notiamo che:

$$f_1(B_1) = [m-\epsilon, 1+m-\epsilon) \cup (2m-\epsilon, +\infty),$$
$$f_2(B_2) = (-\infty, 0) \cup [1, m-\epsilon],$$
$$f_3(B_3) = (1+m-\epsilon, 1+m].$$

Allora:

$$f_1(B_1) \cap f_2(B_2) = \{m-\epsilon\},$$
$$f_2(B_2) \cap f_3(B_3) = \varnothing.$$

Poiché $1+\epsilon < 1+1 = 2 \leq m$, vale che:

$$1+m < m-\epsilon+m.$$

Ció implica che:

$$f_1(B_1) \cap f_3(B_3) = \varnothing.$$

Poiché:

$$f_1^{-1}(\{m-\epsilon\}) = \{0\},$$
$$f_2^{-1}(\{m-\epsilon\}) = \{m-\epsilon\},$$

se definiamo l'insieme:

$$B = \{0; m-\epsilon\}$$

vale che

$$f_1(B_1 \smallsetminus B) \cap f_2(B_2 \smallsetminus B) = \varnothing.$$

L'insieme B é Boreliano, in quanto unione di due chiusi, e ha misura di Lebesgue nulla. Concludiamo che valgono tutte le ipotesi del Teorema 5.15. Consideriamo ora l'insieme Boreliano $G = [0, m]$. Calcolariamo le intersezioni di G con i Boreliani B_i, $i \in I$:

$$G \cap B_1 = [0, m] \cap ([0, 1) \cup (m, +\infty)) = ([0, m] \cap [0, 1)) \cup ([0, m] \cap (m, +\infty)),$$

e poiché $m \geq 2$,

$$G \cap B_1 = [0, 1) \cup \varnothing = [0, 1).$$

L'intersezione di G con il secondo boreliano é:

$$G \cap B_2 = [0, m] \cap ((-\infty, 0) \cup [1, m-\epsilon]) = ([0, m] \cap (-\infty, 0)) \cup ([0, m] \cap [1, m-\epsilon]),$$

e poiché $m \geq 2$,

$$G \cap B_2 = \varnothing \cup [1, m-\epsilon] = [1, m-\epsilon].$$

Infine:

$$G \cap B_3 = [0, m] \cap (m-\epsilon, m] = (m-\epsilon, m].$$

Allora:

$$\bigcup_{i=1,2,3} f_i(G \cap B_i) = f_1([0,1)) \cup f_2([1, m-\epsilon]) \cup f_3((m-\epsilon, m])$$
$$= [m-\epsilon, m-\epsilon+1) \cup [1, m-\epsilon] \cup (m-\epsilon+1, m+1]$$
$$= [1, m-\epsilon+1) \cup (m-\epsilon+1, m+1] = [1, m+1] \setminus \{m-\epsilon+1\}.$$

Se $\mu = \mathcal{L}^1 \llcorner [0,m]$ é la misura di Lebesgue concentrata su $[0,m]$, dall'Osservazione 5.16 possiamo concludere che:

$$(f_\sharp \mu)(E) = \mathcal{L}^1 \llcorner ([1, m+1] \setminus \{m-\epsilon+1\}), \text{ per ogni } E \subset \mathbb{R},$$

ovvero $f_\sharp \mu$ sui Boreliani di $\mathbb{R}$ é la misura di Lebesgue concentrata su $[1, m+1] \setminus \{m-\epsilon+1\}$. Dunque, se $\mu_0 = \mathcal{L}^n \llcorner [0,m]$ e $\mu_1 = \mathcal{L}^n \llcorner [1, m+1]$, la mappa definita in (5.49) é ammissibile (vedi il Lemma che segue).

Lemma 5.21. *Sia:*

$$\mu : \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0, +\infty]$$

una misura su X *e sia* $A \subset X$ *tale che* $\mu(A) = 0$. *Allora, dato* $A_1 \subset X$, *vale che:*

$$\mu(E \cap A_1) = \mu(E \cap (A_1 \cup A)), \text{ per ogni } E \subset X,$$

ovvero:

$$\mu \llcorner A_1 = \mu \llcorner (A_1 \cup A).$$

Dimostrazione. Dalla monotonia di μ segue che:

$$\mu(E \cap A_1) \le \mu(E \cap (A_1 \cup A)).$$

Notiamo che:

$$E \cap A_1 \subset E \cap (A_1 \cup A) = (E \cap A_1) \cup (E \cap A),$$

allora dalla subadditivitá di μ segue che:

$$\mu(E \cap A_1) \le \mu(E \cap (A_1 \cup A)) \le \mu(E \cap A_1) + \mu(E \cap A).$$

Per ipotesi A ha misura nulla e ció implica che:

$$0 \le \mu(E \cap A) \le \mu(A) = 0,$$

quindi $\mu(E \cap A) = 0$. Possiamo allora concludere che:

$$\mu(E \cap A_1) \le \mu(E \cap (A_1 \cap A)) \le \mu(E \cap A_1),$$

ovvero:

$$\mu(E \cap A_1) = \mu(E \cap (A \cup A)).$$

$\square$

Nel prossimo esempio lavoreremo con combinazioni lineari (a coefficienti positivi) di delte di Dirac. Mostriamo alcune proprietá di tali combinazioni lineari.

Proposizione 5.22. *Siano* $k \in \mathbb{N}$, $\lambda_i \in (0, +\infty)$ *e*

$$\mu_i : \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0, +\infty]$$

misure su X*, per ogni* $i = 1, ..., k$*. Definiamo* μ *tale che:*

$$\mu(E) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mu_i(E),$$

per ogni $E \subset X$*. Allora* μ *é una misura su* X*.*

Dimostrazione. Se siamo nel caso in cui le misure μ_i sono tutte finite, ovvero:

$$\mu_i(E) < +\infty, \text{ per ogni } i = 1, ..., k, \ E \subset X,$$

allora, poiché i coefficienti λ_i sono tutti positivi, segue che:

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mu_i(E) \in (0, +\infty), \text{ per ogni } E \subset X.$$

Se invece esiste i_* tale che $\mu_{i_*}(E) = +\infty$ per qualche $E \subset X$, poiché $\lambda_{i_*} > 0$, segue che:

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mu_i(E) = +\infty.$$

Da questo deduciamo che :

$$\mu : \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0, +\infty].$$

Verifichiamo che μ é una misura:

- $\mu(E) = 0$; infatti ogni μ_i é una misura, quindi $\mu_i(\varnothing) = 0$ e $\sum_{i=1}^{k} \mu_i(\varnothing)\lambda_i = \sum_{i=1}^{k} 0 = 0$.
- se $E \subset \{E_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset X$, allora:

$$\mu(E) \le \sum_{i=1}^{k} \mu(E_i). \tag{5.50}$$

Infatti, se siamo nel caso in cui:

$$\sum_{j=1}^{k} \mu(E_j) = +\infty,$$

allora (5.50) é equivalente a:

$$\mu(E) \leq +\infty$$

ed é sicuramente verificata. Altrimenti siamo nella situazione in cui:

$$\sum_{j=1}^{k} \mu(E_j) < +\infty,$$

che é equivalente a:

$$\sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mu_i(E_j) < +\infty.$$

Notiamo che poiché $\lambda_i > 0, \mu_i(E_j) \geq 0$, allora per ogni $p = 1, ..., k$ segue che:

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \lambda_p \mu_p(E_j) \leq \sum_{j=1}^{+\infty} \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mu_i(E_j) < +\infty,$$

quindi:

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \lambda_p \mu_p(E_j) < +\infty. \tag{5.51}$$

Sappiamo che $\lambda_p \in (0, +\infty)$, quindi (5.51) implica che:

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \mu_p(E_j) < +\infty. \tag{5.52}$$

Ció ci permette di affermare che:

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \lambda_i \mu_i(E_j) = \lambda_i \sum_{j=1}^{+\infty} \mu_i(E_j). \tag{5.53}$$

Segue allora che:

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \mu(E_j) = \sum_{j=1}^{+\infty} \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mu_i(E_j) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{+\infty} \lambda_i \mu_i(E_j) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \sum_{j=1}^{+\infty} \mu_i(E_j).$$

Poiché μ_i, per $i = 1, ..., k$, sono misure, possiamo continuare con:

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \mu(E_j) \geq \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mu_i(E) = \mu(E).$$

In conclusione, abbiamo mostrato che:

$$\mu(E) \leq \sum_{j=1}^{+\infty} \mu(E_j).$$

□

Proposizione 5.23. *Siano $k \in \mathbb{N}$ e $\mu_1, ..., \mu_k$ misure finite su X:*

$$\mu_i : \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0, +\infty), \text{ per ogni } i = 1, ..., k.$$

Inoltre, siano:

$$\lambda_i \in (0, +\infty), \text{ per ogni } i = 1, ..., k.$$

Per ogni $E \subset X$, consideriamo:

$$\mu(E) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mu_i(E).$$

Abbiamo giá mostrato che μ é una misura su X. Poiché le misure $\mu_1, ..., \mu_k$ sono finite, anche μ é finita e inoltre vale che:

$$\bigcap_{i=1}^{k} \mathcal{M}_{\mu_i} \subset \mathcal{M}_{\mu}.$$

Dimostrazione. Mostriamo che la misura μ é finita. Dato $E \subset X$, basta notare che:

$$\mu(E) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mu_i(E),$$

e poiché $\mu_i(E) \in [0, +\infty)$, $\lambda_i \in (0, +\infty)$ per ogni $i = 1, ..., k$, abbiamo che $\mu(E) \in [0, +\infty)$.

Vogliamo ora provare che:

$$\bigcap_{i=1}^{k} \mathcal{M}_{\mu_i} \subset \mathcal{M}_{\mu}.$$

Sia $A \in \bigcap_{i=1}^{k} \mathcal{M}_{\mu_i}$, allora per ogni $B \subset X$ e per ogni $i = 1, ..., k$ risulta:

$$\mu_i(B) = \mu_i(B \cap A) + \mu_i(B \setminus A).$$

Sommando le equazioni per λ_i e sommandole su i troviamo che:

$$\begin{aligned}\mu(B) &= \lambda_1 \mu_1(B \cap A) + \lambda_1 \mu_1(B \setminus A) + ... + \lambda_k \mu_k(B \cap A) + \lambda_k \mu_k(B \setminus A) \\ &= \mu(B \cap A) + \mu(B \setminus A),\end{aligned}$$

quindi $A \in \mathcal{M}_{\mu}$. □

Ricordiamo che quando abbiamo come misura la delta di Dirac concentrata in un punto p, allora tutti gli insiemi sono misurabili:

$$p \in X, \mu = \delta_p \implies \mathcal{M}_{\mu} = \mathcal{P}(X).$$

Corollario 5.24. *Siano* $k \in \mathbb{N}$ *e* $x_1, ..., x_k \in X$. *Siano* $\lambda_1, ..., \lambda_k \in (0, +\infty)$. *Consideriamo:*

$$\mu = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \delta_{x_i}.$$

Allora:

$$\mathcal{M}_\mu = \mathcal{P}(X).$$

Dimostrazione. Osserviamo che:

$$\mathcal{P}(X) = \bigcap_{i=1}^{k} \mathcal{P}(X) = \bigcap_{i=1}^{k} \mathcal{M}_{\delta_{x_i}}.$$

Dalla Proposizione precedente segue allora che:

$$\mathcal{P}(X) \subset \mathcal{M}_\mu.$$

Poiché vale anche che $\mathcal{M}_\mu \subset \mathcal{P}(X)$, possiamo concludere la tesi. □

Teorema 5.25. *Sia* $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *limitata. Sia* $h \in \mathbb{N}$ *e siano* $x_1, ..., x_h \in X$ *punti distinti,* $a_1, ..., a_h \in (0, +\infty)$. *Consideriamo la misura:*

$$\mu = \sum_{i=1}^{h} a_i \delta_{x_i}.$$

Allora si ha:

$$\int_X f \; d\mu = \sum_{i=1}^{h} a_i f(x_i). \tag{5.54}$$

Dimostrazione. Siano $E_i \subset X$, per $i = 1, ..., k$, disgiunti a due a due e tali che $X = \bigcup_{i=1}^{k} E_i$ e siano $c_i \in \mathbb{R}$. Sia ϕ la funzione semplice cosí definita:

$$\phi = \sum_{i=1}^{k} c_i 1_{E_i}.$$

Allora:

$$\int_X \phi \; d\mu = \sum_{i=1}^{k} c_i \mu(E_i) = \sum_{i=1}^{k} c_i \sum_{j=1}^{h} a_j \delta_{x_j}(E_i).$$

Osserviamo che:

$$\sum_{j=1}^{h} a_j \phi(x_j) = \sum_{j=1}^{h} a_j \sum_{i=1}^{k} c_i 1_{E_i}(x_j).$$

Inoltre:

$$1_{E_i}(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{se } x_j \in E_i, \\ 0 & \text{se } x_j \notin E_i, \end{cases}$$

allora:

$$1_{E_i}(x_j) = \delta_{x_j}(E_i),$$

e segue che:

$$\sum_{j=1}^{h} a_j \phi(x_j) = \sum_{j=1}^{h} a_j \sum_{i=1}^{k} c_i \delta_{x_j}(E_i)$$

$$= \sum_{j=1}^{h} \sum_{i=1}^{k} a_j c_i \delta_{x_j}(E_i) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{h} a_j c_i \delta_{x_j}(E_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{k} c_i \sum_{j=1}^{h} a_j \delta_{x_j}(E_i).$$

Dunque otteniamo l'uguaglianza:

$$\int_X \phi \; d\mu = \sum_{j=1}^{h} a_j \phi(x_j).$$

Data una funzione f limitata, se consideriamo ϕ e ψ funzioni semplici tali che:

$$\phi \leq f \leq \psi,$$

allora:

$$\phi(x_j) \leq f(x_j) \leq \psi(x_j),$$

quindi si ha:

$$\int_X \phi \; d\mu = \sum_{j=1}^{h} a_j \phi(x_j) \leq \int_{j=1}^{h} a_j f(x_j) \leq \sum_{j=1}^{h} a_j \psi(x_j) = \int_X \psi \; d\mu.$$

Indichiamo con $\mathcal{S}^-(f)$ l'insieme delle funzioni semplici minoranti di f e con $\mathcal{S}^+(f)$ l'insieme delle funzioni semplici maggioranti di f. Allora le disuguaglianza precedenti garantiscono che:

$$\sup_{\phi \in \mathcal{S}^-(f)} \int_X \phi \; d\mu \leq \sum_{j=1}^{h} a_j f(x_j) \leq \inf_{\psi \in \mathcal{S}^+(f)} \int_X \psi \; d\mu.$$

Consideriamo ora:

$$\phi = \sum_{j=1}^{h} f(x_j) 1_{\{x_j\}} + m 1_{X \setminus \{x_1, \dots, x_h\}},$$

dove:

$$m = \inf_X f.$$

La funzione ϕ é semplice.
Se $x \in \{x_1, ..., x_h\}$, allora esiste i_* tale che $x = x_{i_*}$, per cui:

$$f(x) = f(x_{i_*}) = f(x_{i_*})1_{x_{i_*}}(x) = \sum_{i=1}^{h} f(x_i)1_{\{x_i\}}(x)$$

$$= \sum_{i=1}^{h} f(x_i)1_{\{x_i\}}(x) + m1_{X\setminus\{x_1,...,x_h\}}(x) = \phi(x),$$

ed esiste $x = x_{i_*} \neq x_i$ per $i \neq i_*$.
Se $x \in X \setminus \{x_1, ..., x_h\}$, allora:

$$f(x) \geq m = m1_{X\setminus\{x_1,...,x_h\}}(x) =$$

$$= \sum_{i=1}^{h} f(x_i)1_{\{x_i\}}(x) + m1_{X\setminus\{x_1,...,x_h\}}(x) = \phi(x).$$

Quindi ϕ minora f.

Ora consideriamo:

$$\int_X \phi \; d\mu = \sum_{j=1}^{h} f(x_j)\mu(\{x_j\}) + m\mu(X \setminus \{x_1, ..., x_h\})$$

$$= \sum_{j=1}^{h} f(x_j) \sum_{r=1}^{h} a_r\delta_{x_r}(\{x_j\}) + m\sum_{r=1}^{h} a_r\delta_{x_r}(X \setminus \{x_1, ..., x_h\})$$

$$= \sum_{j=1}^{h} f(x_j)a_j.$$

Poiché:

$$\delta_{x_r}(\{x_j\}) = \delta_{r_j} \text{ e } \delta_{x_r}(X \setminus \{x_1, ..., x_h\}) = 0.$$

Da ció otteniamo che:

$$\sup_{\phi\in\mathcal{S}^-(f)} \int_X \phi \; d\mu = \sum_{j=1}^{h} a_j f(x_j).$$

Definiamo:

$$\psi = \sum_{j=1}^{h} f(x_j)1_{\{x_j\}} + M1_{X\setminus\{x_1,...,x_h\}},$$

dove:

$$M = \sup_X f.$$

La funzione ψ é semplice. Notiamo che:

$$\text{se } x \in \{x_1, ..., x_h\}, \text{ allora } f(x) = \psi(x),$$

mentre:

$$\text{se } x \in X \smallsetminus \{x_1, ..., x_h\}, \text{ allora } f(x) \leq M = \psi(x),$$

e ció mostra che ψ maggiora f.
Inoltre abbiamo che:

$$\int_X \psi \ d\mu = \sum_{j=1}^h f(x_j)\mu(\{x_j\}) + M\mu(X \smallsetminus \{x_1, ..., x_h\})$$

$$= \sum_{j=1}^h f(x_j) \sum_{r=1}^h a_r \delta_{x_r}(\{x_j\}) + M \sum_{r=1}^h a_r \delta_{x_r}(X \smallsetminus \{x_1, ..., x_h\})$$

$$= \sum_{j=1}^h f(x_j) a_j.$$

Quindi possiamo affermare che:

$$\inf_{\psi \in \mathcal{S}^+(f)} \int_X \psi \ d\mu = \sum_{j=1}^h a_j f(x_j).$$

Riassumendo, abbiamo mostrato che:

$$\inf_{\psi \in \mathcal{S}^+(f)} \int_X \psi \ d\mu = \sum_{j=1}^h a_j f(x_j) = \sup_{\phi \in \mathcal{S}^-(f)} \int_X \phi \ d\mu,$$

e possiamo concludere che vale (5.54). □

Proposizione 5.26. *Sia $f : X \longrightarrow Y$ una funzione, siano $y_1, y_2 \in Y, y_1 \neq y_2$ e siano $c_1,\ c_2 \in (0, +\infty)$. Data una misura μ su X, supponiamo che la push-forward di μ tramite f sia:*

$$f_\sharp \mu = c_1 \delta_{y_1} + c_2 \delta_{y_2}.$$

Allora:

$$\begin{aligned} &\mu\left(f^{-1}(\{y_1\})\right) = c_1, \\ &\mu\left(f^{-1}(\{y_2\})\right) = c_2, \\ &\mu\left(f^{-1}(Y \smallsetminus \{y_1, y_2\})\right) = 0. \end{aligned} \tag{5.55}$$

Inoltre, gli insiemi $f^{-1}(\{y_1\}),\ f^{-1}(\{y_2\}),\ f^{-1}(Y \smallsetminus \{y_1, y_2\})$ sono a due a due disgiunti e vale che:

$$X = f^{-1}(\{y_1\}) \cup f^{-1}(\{y_2\}) \cup f^{-1}(Y \smallsetminus \{y_1, y_2\}).$$

Dimostrazione. Verifichiamo le uguaglianze in (5.55):

$$\mu(f^{-1}(\{y_1\}) = (f_\sharp\mu)(\{y_1\}) = (c_1\delta_1 + c_2\delta_2)(\{y_1\})$$
$$= c_1\delta_{y_1}(\{y_1\}) + c_2\delta_{y_2}(\{y_1\}) = c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0 = c_1,$$
$$\mu(f^{-1}(\{y_2\}) = (f_\sharp\mu)(\{y_2\}) = (c_1\delta_1 + c_2\delta_2)(\{y_2\})$$
$$= c_1\delta_{y_1}(\{y_1\}) + c_2\delta_{y_2}(\{y_2\}) = c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 1 = c_2,$$
$$\mu(f^{-1}(Y \setminus \{y_1, y_2\}) = (f_\sharp\mu)(Y \setminus \{y_1, y_2\}) = (c_1\delta_{y_1} + c_2\delta_{y_2})(Y \setminus \{y_1, y_2\})$$
$$= c_1\delta_{y_1}(Y \setminus \{y_1, y_2\}) + c_2\delta_{y_2}(Y \setminus \{y_1, y_2\}) = c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 = 0.$$

Il fatto che gli insiemi $f^{-1}(\{y_1\})$, $f^{-1}(\{y_2\})$, $f^{-1}(Y \setminus \{y_1, y_2\})$ siano a due a due disgiunti segue dal fatto che se $A \cap B = \varnothing$, allora $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = \varnothing$. Inoltre:

$$f^{-1}(\{y_1\}) \cup f^{-1}(\{y_2\}) \cup f^{-1}(Y \setminus \{y_1, y_2\})$$
$$= f^{-1}(\{y_1\} \cup \{y_2\} \cup (Y \setminus \{y_1, y_2)) = f^{-1}(Y) = X.$$

□

Esempio 5.27. Siano $f_0 = \mathcal{L}^1 \llcorner [-1, 1]$ e $f_1 = \delta_{-1} + \delta_1$ due misure su X. Mostriamo che la mappa:

$$\psi(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0, \\ \alpha & \text{se } x = 0, \\ 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

é ammissibile.

Verifichiamo che ψ sia una mappa Boreliana. Sia A un aperto di $\mathbb{R}$, allora:

$$\psi^{-1}(A) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } A \cap \{-1, 1, \alpha\} = \{-1, 1, \alpha\}, \\ (-\infty, 0) & \text{se } A \cap \{-1, 1, \alpha\} = \{-1\}, \\ (0, +\infty) & \text{se } A \cap \{-1, 1, \alpha\} = \{1\}, \\ \{0\} & \text{se } A \cap \{-1, 1, \alpha\} = \{\alpha\}, \\ (-\infty, 0] & \text{se } A \cap \{-1, 1, \alpha\} = \{-1, \alpha\}, \\ [0, +\infty) & \text{se } A \cap \{-1, 1, \alpha\} = \{1, \alpha\}, \\ \mathbb{R} \setminus \{0\} & \text{se } A \cap \{-1, 1, \alpha\} = \{-1, 1\}, \\ \varnothing & \text{se } A \cap \{-1, 1, \alpha\} = \varnothing. \end{cases}$$

Allora, in ogni caso, $\psi^{-1}(A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Mostriamo che ψ é ammissibile.

$$\psi_\sharp f_0(E) = f_0(\psi^{-1}(E)) = \left(\mathcal{L}^1 \llcorner [-1, 1]\right)(\psi^{-1}(E)) = \mathcal{L}^1\left([-1, 1] \cap \psi^{-1}(E)\right).$$

Allora:

$$\psi_\sharp f_0(E) = \begin{cases} \mathcal{L}^1([-1,1]) = 2 & \text{se } A \cap \{-1,1,\alpha\} = \{-1,1,\alpha\}, \\ \mathcal{L}^1([-1,0)) = 1 & \text{se } A \cap \{-1,1,\alpha\} = \{-1\}, \\ \mathcal{L}^1((0,1]) = 1 & \text{se } A \cap \{-1,1,\alpha\} = \{1\}, \\ \mathcal{L}^1(\{0\}) = 0 & \text{se } A \cap \{-1,1,\alpha\} = \{\alpha\}, \\ \mathcal{L}^1([-1,0]) = 1 & \text{se } A \cap \{-1,1,\alpha\} = \{-1,\alpha\}, \\ \mathcal{L}^1([0,1]) = 1 & \text{se } A \cap \{-1,1,\alpha\} = \{1,\alpha\}, \\ \mathcal{L}^1([-1,1] \setminus \{0\}) = 2 & \text{se } A \cap \{-1,1,\alpha\} = \{-1,1\}, \\ \mathcal{L}^1(\varnothing) = 0 & \text{se } A \cap \{-1,1,\alpha\} = \varnothing. \end{cases}$$

Segue che $\psi_\sharp f_0(E) = (\delta_{-1} + \delta_1)(E)$.

5.4 Integrale rispetto ad una misura push-forward.

Vogliamo ora analizzare le proprietá dell'integrale rispetto ad una misura push-forward, in particolare vogliamo arrivare a mostrare che:

$$\int_Y u\, d(f_\sharp\mu) = \int_X u \circ f\, d\mu, \text{ per ogni funzione Boreliana e limitata } u : Y \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Dobbiamo prima mostrare alcuni risultati preliminari.

Proposizione 5.28. *Sia $f : X \longrightarrow Y$ una funzione e sia μ una misura su X. Dato $E \subset Y$, se $f^{-1}(E) \in \mathcal{M}_\mu(X)$, allora $E \in \mathcal{M}_{f_\sharp\mu}(Y)$.*

Dimostrazione. Sia $E \subset Y$ tale che $f^{-1}(E) \in \mathcal{M}_\mu(X)$. Vogliamo mostrare che per ogni $B \subset Y$ vale che:

$$(f_\sharp\mu)(B) = (f_\sharp\mu)(E \cap B) + (f_\sharp\mu)(B \setminus E). \tag{5.56}$$

Notiamo che:

$$(f_\sharp\mu)(B \cap E) = \mu\big(f^{-1}(B \cap E)\big) = \mu\big(f^{-1}(B) \cap f^{-1}(E)\big),$$

$$\begin{aligned}(f_\sharp\mu)(B \setminus E) &= \mu\big(f^{-1}(B \setminus E)\big) = \mu\big(f^{-1}(B \cap (Y \setminus E))\big) = \mu\big(f^{-1}(B) \cap f^{-1}(Y \setminus E)\big) \\ &= \mu\big(f^{-1}(B) \cap \big[X \setminus f^{-1}(E)\big]\big) = \mu\big(f^{-1}(B) \setminus f^{-1}(E)\big).\end{aligned}$$

Segue che:

$$(f_\sharp\mu)(E \cap B) + (f_\sharp\mu)(B \setminus E) = \mu\big(f^{-1}(B) \cap f^{-1}(E)\big) + \mu\big(f^{-1}(B) \setminus f^{-1}(E)\big).$$

Dalle ipotesi sappiamo che $f^{-1}(E) \in \mathcal{M}_\mu(X)$, quindi per ogni $Z \subset X$ risulta che:

$$\mu(Z) = \mu(Z \cap f^{-1}(E)) + \mu(Z \setminus f^{-1}(E)). \tag{5.57}$$

Scegliendo in (5.57) $Z = f^{-1}(B)$, possiamo affermare che:

$$\mu(f^{-1}(B)) = \mu\left(f^{-1}(B) \cap f^{-1}(E)\right) + \mu\left(f^{-1}(B) \setminus f^{-1}(E)\right). \tag{5.58}$$

In conclusione:

$$\begin{aligned}(f_\sharp\mu)(B) = \mu(f^{-1}(B)) &= \mu\left(f^{-1}(B) \cap f^{-1}(E)\right) + \mu\left(f^{-1}(B) \setminus f^{-1}(E)\right) \\ &= (f_\sharp\mu)(E \cap B) + (f_\sharp\mu)(B \setminus E)\end{aligned}$$

□

Proposizione 5.29. *Siano X, Y due spazi metrici e sia $f : X \longrightarrow Y$ una funzione Boreliana. Assegnata una misura μ di Borel su X, segue che:*

$$\mathcal{B}(Y) \subset \mathcal{M}_{f_\sharp\mu}(Y),$$

ovvero ogni Boreliano di Y é $f_\sharp\mu$ misurabile (la misura $f_\sharp\mu$ é boreliana).

Dimostrazione. Dato $E \in \mathcal{B}(Y)$ basta mostrare che $f^{-1}(E) \in \mathcal{M}_\mu(X)$. Infatti, noto ció, dalla Propositione precedente segue che $E \in \mathcal{M}_{f_\sharp\mu}$ e quindi la tesi.
Poiché f é boreliana, la controimmagine di un boreliano é ancora un boreliano, dunque $f^{-1}(E) \in \mathcal{B}(X)$. La misura μ é boreliana su X, dunque $\mathcal{B}(X) \subset \mathcal{M}_\mu$. Riassumendo abbiamo che:

$$f^{-1}(E) \in \mathcal{B}(X) \subset \mathcal{M}_\mu(X).$$

□

Proposizione 5.30. *Siano X, Y due spazi metrici e siano due funzioni boreliane:*

$$\begin{aligned} f &: X \longrightarrow Y, \\ g &: Y \longrightarrow \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Allora la funzione $g \circ f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é boreliana.

Dimostrazione. Dobbiamo mostrare che per ogni $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ vale che $(g \circ f)^{-1}(B) \in \mathcal{B}(X)$. Notiamo che:

$$(g \circ f)^{-1}(B) = f^{-1}\left(g^{-1}(B)\right).$$

Poiché g é Boreliana, vale che $g^{-1}(B) \in \mathcal{B}(Y)$ e quindi, poiché f é Boreliana, possiamo concludere che $f^{-1}(g^{-1}(B)) \in \mathcal{B}(X)$. □

Proposizione 5.31. *Siano X, Y due spazi metrici e siano due funzioni:*

$$f : X \longrightarrow Y,$$
$$g : Y \longrightarrow \mathbb{R}$$

con g limitata. Allora la funzione $g \circ f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é limitata.

Dimostrazione. Poiché g é limitata, esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che $|g(y)| \leq M$ per ogni $y \in Y$, quindi in particolare, prendendo $y = f(x)$ al variare di $x \in X$, vale che:

$$|g(f(x))| \leq M, \text{ per ogni } x \in X.$$

□

Proposizione 5.32. *Sia $f : X \longrightarrow Y$ una funzione e μ una misura finita su X. Allora vale che:*

$$(f_\sharp \mu)(Y) = \mu(X)$$

e quindi $f_\sharp \mu$ é una misura finita su Y.

Dimostrazione. Basta notare che:

$$(f_\sharp \mu)(Y) = \mu\left(f^{-1}(Y)\right) = \mu(X).$$

□

Proposizione 5.33. *Sia X uno spazio metrico e sia $h : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione Boreliana e limitata. Sia μ una misura su X di Borel e finita. Allora per ogni $\epsilon > 0$ esistono $k \in \mathbb{N}$, $\{A_i\}_{i=1}^k \subset \mathcal{B}(X)$, $\{\alpha_i\}_{i=1}^k \subset \mathbb{R}$, $\{\beta_i\}_{i=1}^k \subset \mathbb{R}$ tali che:*

- $\bigcup\limits_{i=1}^{k} A_i = X$,
- $A_i \cap A_j = \varnothing$ *per ogni* $i \neq j$,
- $\sum_{i=1}^k \alpha_i 1_{A_i}(x) \leq h(x) \leq \sum_{i=1}^k \beta_i 1_{A_i}(x)$ *per ogni* $x \in X$,
- *definite le funzioni* $\phi(x) = \sum_{i=1}^k \alpha_i 1_{A_i}(x)$, $\psi(x) = \sum_{i=1}^k \beta_i 1_{A_i}(x)$, *vale che:*

$$\int_X \phi \, d\mu - \int_X \psi \, d\mu \leq \epsilon \mu(X) \tag{5.59}$$

e quindi h é integrabile rispetto alla misura μ.

Dimostrazione. Sia $\epsilon > 0$. Poiché la funzione h é limitata esistono $a \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{N}$ tali che:

$$h(X) \subset [a, a + k\epsilon). \tag{5.60}$$

Definiamo gli insiemi:

$$A_i = h^{-1}\left([a + (i-1)\epsilon, a + i\epsilon)\right), \text{ per } i = 1, ..., k.$$

Gli insiemi A_i sono Boreliani, in quanto $[a + (i-1)\epsilon, a + i\epsilon)$ é boreliano e h é una funzione Boreliana. Verifichiamo ora che:

$$A_i \cap A_j = \varnothing, \text{ per ogni } i \neq j, \ i, j = 1, ..., k.$$

Supponiamo che $i < j$, allora poiché $i, j \in \mathbb{N}$ segue che:

$$1 \leq i < i + 1 \leq j \leq k.$$

Allora $i \leq j - 1$ e da qui segue che:

$$a + i\epsilon \leq a + (j-1)\epsilon. \tag{5.61}$$

Se per assurdo supponessimo che esiste $x \in A_i \cap A_j$, dovrebbe verificarsi sia che $h(x) < a + i\epsilon$ e sia che $a + (j-1)\epsilon \leq h(x)$. Allora da (5.61) seguirebbe che:

$$h(x) < a + i\epsilon \leq a + (j-1)\epsilon \leq h(x),$$

ovvero $h(x) < h(x)$, ma ció ovviamente non é possibile. Segue allora che $A_i \cap A_j = \varnothing$ per ogni $i \neq j$.

Verifichiamo ora che:

$$X = \bigcup_{i=1}^{k} A_i. \tag{5.62}$$

Da (5.60) segue che per ogni $x \in X$ vale che $h(x) \in [a, a + k\epsilon)$, ovvero:

$$a \leq h(x) < a + k\epsilon.$$

Allora esiste i intero, $1 \leq i \leq k$, tale che:

$$a + (i-1)\epsilon \leq h(x) < a + i\epsilon, \tag{5.63}$$

ovvero $x \in h^{-1}\left([a + (i-1)\epsilon, a + i\epsilon)\right) = A_i$. Dunque, abbiamo provato che:

$$X \subset \bigcup_{i=1}^{k} A_i.$$

L'altra inclusione é ovvia e segue (5.62).

Poniamo:

$$\alpha_i = a + (i-1)\epsilon,$$
$$\beta_i = a + i\epsilon,$$

per ogni $i = 1, ..., k$ e definiamo le funzioni:

$$\psi(x) = \sum_{i=1}^k \alpha_i 1_{A_i}(x),$$
$$\phi(x) = \sum_{i=1}^k \beta_i 1_{A_i}(x).$$

Abbiamo giá visto che per ogni $x \in X$ vale (5.63), quindi esiste $i \in \{1, ..., k\}$ tale che:

$$\psi(x) = \alpha_i = a + (i-1)\epsilon \le h(x) < a + i\epsilon = \beta_i = \phi(x).,$$

dunque:

$$\psi \le h \le \phi \text{ in } X. \tag{5.64}$$

Rimane da mostrare la (5.59). Gli insiemi A_i sono Boreliani e per ipotesi μ é una misura di Borel, quindi $A_i \in \mathcal{B}(X) \subset \mathcal{M}_\mu(X)$. Poiché gli insiemi A_i sono μ-misurabili segue che ϕ e ψ sono funzioni semplici, quindi segue che:

$$\begin{aligned}\int_X \phi \, d\mu - \int_X \psi \, d\mu &= \sum_{i=1}^k \beta_i \mu(A_i) - \sum_{i=1}^k \alpha_i \mu(A_i) = \sum_{i=1}^k (\beta_i - \alpha_i)\mu(A_i) \\ &= \sum_{i=1}^k \epsilon\mu(A_i) = \epsilon \sum_{i=1}^k \mu(A_i).\end{aligned}$$

Poiché gli insiemi A_i sono μ-misurabili e a due a due disgiunti, possiamo continuare con:

$$\int_X \phi \, d\mu - \int_X \psi \, d\mu = \epsilon\mu\left(\bigcup_{i=1}^k A_i\right) = \epsilon\mu(X),$$

quindi:

$$\int_X \phi \, d\mu - \int_X \psi \, d\mu \le \epsilon\mu(X). \tag{5.65}$$

Allora la (5.65) é la (5.59). Dall'arbitrarietá di ϵ segue che h é μ-integrabile. $\square$

Proposizione 5.34. *Siano X, Y due spazi metrici, $f : X \longrightarrow Y$ una funzione Boreliana e sia μ una misura di Borel su X finita. Dati degli insiemi $A_i \in \mathcal{B}(Y)$, per $i = 1, ..., k$, a due a due disgiunti e tali che $Y = \bigcup_{i=1}^k A_i$ e dati $\alpha_i \in \mathbb{R}$, per $i = 1, ..., k$, definiamo la funzione:*

$$\phi = \sum_{i=1}^k \alpha_i 1_{A_i}.$$

Allora, vale che:

- $f^{-1}(A_i) \in \mathcal{B}(X)$ *per* $i = 1, ..., k$ *e sono a due a due disgiunti,*
- $X = \bigcup_{i=1}^{k} f^{-1}(A_i)$,
- $f \circ \phi = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i 1_{f^{-1}(A_i)}$,
- $\int_Y \phi \; d\left(f_\sharp \mu\right) = \int_X \phi \circ f \; d\mu$.

Dimostrazione. Notiamo innanzitutto che:

$$X = f^{-1}(Y) = f^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) = \bigcup_{i=1}^{k} f^{-1}(A_i).$$

Inoltre, gli insiemi $f^{-1}(A_i)$ sono Boreliani di X in quanto la funzione f é boreliana e gli insiemi A_i sono boreliani di Y. Inoltre, gli insiemi $f^{-1}(A_i)$ sono a due a due disgiunti in quanto gli insiemi A_i sono a due a due disgiunti. Dato $x \in X$, esiste $i \in \{1, ..., k\}$ tale che $x \in f^{-1}(A_i)$ allora $f(x) \in A_i$, quindi $\phi(f(x)) = \alpha_i$. Ció mostra che:

$$f \circ \phi = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i 1_{f^{-1}(A_i)}.$$

Allora la funzione $\phi \circ f$ é semplice e questo implica che:

$$\int_X \phi \circ f \; d\mu = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mu(f^{-1}(A_i)).$$

Possiamo allora concludere che:

$$\int_X \phi \circ f \; d\mu = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mu(f^{-1}(A_i)) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \left(f_\sharp \mu\right)(A_i) = \int_Y \phi \; d\left(f_\sharp \mu\right).$$

□

Proposizione 5.35. *Siano* X *e* Y *due spazi metrici e sia* μ *una misura Boreliana su* X *e finita. Siano* $f : X \longrightarrow Y$ *una funzione Boreliana e* $g : Y \longrightarrow \mathbb{R}$ *una funzione Boreliana e limitata. Allora l'applicazione:*

$$g \circ f : X \longrightarrow \mathbb{R}$$

é Boreliana e limitata e $f_\sharp \mu$ *é una misura su* Y *di Borel e finita. Inoltre vale che:*

$$\int_X g \circ f \; d\mu = \int_Y g \; d(f_\sharp \mu). \tag{5.66}$$

Dimostrazione. Dalle Proposizioni 5.30 e 5.31 segue che $g \circ f$ é una funzione Boreliana e limitata. Dalle Proposizioni 5.29 e 5.32 segue che $f_\sharp \mu$ é una misura su Y di Borel e finita. Possiamo allora usare la Proposizione 5.33 e affermare che $g \circ f$ é μ-integrabile su X; allo stesso modo g é $f_\sharp \mu$ integrabile su Y.
Sempre dalla Proposizione 5.33 segue che per ogni $\epsilon > 0$ esistono $k \in \mathbb{N}$, $\{A_i\}_{i=1}^k \subset \mathcal{B}(Y)$, $\{\alpha_i\}_{i=1}^k \subset \mathbb{R}$, $\{\beta_i\}_{i=1}^k \subset \mathbb{R}$ tali che $A_i \cap A_j = \varnothing$ per ogni $i \neq j$, $\bigcup_{i=1}^k A_i = Y$,

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i 1_{A_i}(y) \leq g(y) \leq \sum_{i=1}^k \beta_i 1_{A_i}(y), \text{ per ogni } y \in Y,$$

e infine, definite le funzioni:

$$\psi(y) = \textstyle\sum_{i=1}^k \alpha_i 1_{A_i}(y),$$
$$\phi(y) = \textstyle\sum_{i=1}^k \beta_i 1_{A_i}(y) =$$

vale che:

$$\int_Y \phi \; d\left(f_\sharp \mu\right) - \int_Y \psi \; d\left(f_\sharp \mu\right) \leq \epsilon. \tag{5.67}$$

Allora:

$$\psi\left(f(x)\right) \leq g\left(f(x)\right) \leq \phi\left(f(x)\right), \text{ per ogni } x \in X,$$

quindi:

$$(\psi \circ f)(x) \leq (g \circ f)(x) \leq (\phi \circ f)(x), \text{ per ogni } x \in X.$$

Nella proprosizione precedente abbiamo visto che:

$$\psi \circ f = \textstyle\sum_{i=1}^k \alpha_i 1_{f^{-1}(A_i)},$$
$$\phi \circ f = \textstyle\sum_{i=1}^k \beta_i 1_{f^{-1}(A_i)},$$

inoltre $f^{-1}(A_i) \in \mathcal{B}(X)$, per ogni $i = 1, ..., k$, $f^{-1}(A_i) \cap f^{-1}(A_j) = \varnothing$ per ogni $i \neq j$, $\cup_{i=1}^k f^{-1}(A_i) = X$ e infine:

$$\int_Y \phi \; d\left(f_\sharp \mu\right) = \int_X \phi \circ f \; d\mu, \tag{5.68}$$

$$\int_Y \psi \; d\left(f_\sharp \mu\right) = \int_X \psi \circ f \; d\mu. \tag{5.69}$$

Allora, poiché $\psi \leq g \leq \phi$, segue che:

$$\int_Y \psi \; d\left(f_\sharp \mu\right) \leq \int_Y g \; d\left(f_\sharp \mu\right) \leq \int_Y \phi \; d\left(f_\sharp \mu\right). \tag{5.70}$$

Poiché $\psi \circ f \leq g \circ f \leq \phi \circ f$, vale che:

$$\int_X \psi \circ f \; d\mu \leq \int_X g \circ f \; d\mu \leq \int_X \phi \circ f \; d\mu. \tag{5.71}$$

Da (5.68) e (5.69) segue che l'ultima disuguaglianza si puó riscrivere come:

$$\int_Y \psi \, d(f_\sharp \mu) \le \int_X g \circ f \, d\mu \le \int_Y \phi \, d(f_\sharp \mu). \tag{5.72}$$

Da (5.72) e (5.70) otteniamo che:

$$\left| \int_X g \circ f \, d\mu - \int_X g \, d(f_\sharp \mu) \right| \le \int_Y \phi \, d(f_\sharp \mu) - \int_Y \psi \, d(f_\sharp \mu). \tag{5.73}$$

Da (5.67) segue che per ogni $\epsilon > 0$:

$$| \int_X g \circ f \, d\mu - \int_X g \, d(f_\sharp \mu) | \le \epsilon, \tag{5.74}$$

ovvero:

$$\int_X g \circ f \, d\mu = \int_X g \, d(f_\sharp \mu).$$

□

5.5 Mappe di trasporto ottime e alcuni esempi.

Supponiamo di avere due misure f_0, f_1 su uno spazio X e di avere una mappa di trasporto ammissibile $T: X \longrightarrow X$. Definiamo il funzionale di costo:

$$\int_X |x - T(x)| \, df_1(x). \tag{5.75}$$

Definizione 5.36. Siano X uno spazio e f_0, f_1 due misure su X. Diciamo che una mappa di trasposto ammissibile $\tilde{T} : X \longrightarrow X$ é *ottima* se é la soluzione del problema di Monge:

$$\int_X |x - \tilde{T}(x)| \, df_1(x) = \inf \left\{ \int_X |x - T(x)| \, df_1(x) \mid T : X \longrightarrow X \text{ ammissibili} \right\}. \tag{5.76}$$

Vogliamo ora mostrare un test di ottimalitá per T basato sul fatto che l'estremo inferiore in (5.76) é sempre maggiore o uguale di:

$$\sup \left\{ \int_X u \, df_1 - \int_X u \, df_0 \mid u : X \longrightarrow \mathbb{R}, Lip(u) \le 1 \right\}. \tag{5.77}$$

Proposizione 5.37. *Siano $X \subset \mathbb{R}^n$ un insieme limitato, $T : X \longrightarrow X$ un'applicazione Boreliana e μ una misura di Borel su X finita. Data una funzione $u : X \longrightarrow \mathbb{R}$ Lipschitziana con costante di Lipschitz $Lip(u) \le 1$, allora vale che:*

$$\int_X u \, d(T_\sharp \mu) - \int_X u \, d\mu \le \int_X |T(x) - x| \, d\mu(x). \tag{5.78}$$

Dimostrazione. Notiamo che dalla lipschitzianitá di u e dal fatto che $Lip(u) \le 1$ segue che:

$$u(a) - u(b) \le |u(a) - u(b)| \le Lip(u)|a - b| \le |a - b|, \tag{5.79}$$

quindi:

$$u(a) - u(b) \le |a - b|, \text{ per ogni } a, b \in X. \tag{5.80}$$

Da questa disuguaglianza segue che:

$$\begin{aligned} \int_X |T(x) - x| \, d\mu(x) &\ge \int_X [u(T(x)) - u(x)] \, d\mu(x) \\ &= \int_X u(T(x)) \, d\mu(x) - \int_X u(x) \, d\mu(x). \end{aligned}$$

Poiché X é limitato e u é una funzione Lipschitziana su X, segue che u é limitata su X. Inoltre u é anche Boreliana in quanto Lipschitziana; allora possiamo usare la Proposizione 5.35 e segue che:

$$\int_X |T(x) - x| d\mu(x) \ge \int_X u(y) d\left(T_\sharp \mu\right)(y) - \int_X u(x) d\mu(x).$$

□

Proposizione 5.38. *Siano $X \subset \mathbb{R}^n$ un insieme limitato e μ_0, μ_1 due misure di Borel su X tali che $\mu_0(X) = \mu_1(X) < +\infty$. Allora:*

$$\begin{aligned} &\sup\left\{\int_X u \, d\mu_1 - \int_X u \, d\mu_0 \mid u : X \longrightarrow \mathbb{R}, Lip(u) \le 1\right\} \le \\ &\inf\left\{\int_X |T(x) - x| \, d\mu_0(x) \mid T : X \longrightarrow X \textit{ Boreliana } : \mu_1 = T_\sharp \mu_0\right\}. \end{aligned} \tag{5.81}$$

Dimostrazione. Dalla Proposizione precedente sappiamo che per ogni funzione lipschitziana $u : X \longrightarrow \mathbb{R}$ con $Lip(u) \le 1$ e per ogni applicazione $T : X \longrightarrow X$ Boreliana e ammissibile vale che:

$$\int_X u \, d\mu_1 - \int_X u \, d\mu_0 = \int_X u \, d\left(T_\sharp \mu_0\right) - \int_X u \, d\mu_0 \le \int_X |T(x) - x| \, d\mu_0(x). \tag{5.82}$$

Possiamo passare nel membro sinistro all'estremo superiore al variare di tutte le funzioni u, poi passare all'estremo inferiore nel membro destro al variare di tutte le applicazioni T e otteniamo la tesi. □

Utilizzando la Proposizione precedente, andiamo a trovare le mappe di trasporto ottimo in alcuni semplici casi.

Esempio 5.39. Sia $n \geq 1$ un intero e siano $f_0 = \mathcal{L}^1 \llcorner [0, n]$ e $f_1 = \mathcal{L}^1 \llcorner [1, 1 + n]$. Definiamo la funzione:

$$\psi(x) = x + 1. \tag{5.83}$$

Abbiamo giá mostrato che $f_1 = \psi_\sharp f_0$, ovvero che ψ é una mappa ammissibile. Mostriamo ora che ψ é una mappa ottima. Mostriamo innanzitutto che il costo relativo a ψ é n:

$$\int_X |\psi(x) - x| \, df_0(x) = \int_0^n 1 \, dx = n.$$

L'estremo superiore in (5.81) é almeno n: basta scegliere la funzione lipschitziana $u(t) = t$ e otteniamo che:

$$\int u \, df_1 - \int u \, df_0 = \int_1^{n+1} t \, dt - \int_0^n t \, dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_{t=1}^{t=n+1} - \left[\frac{t^2}{2}\right]_{t=0}^{t=n} = n.$$

Allora abbiamo trovato la mappa ammissibile ψ e la funzione u che verificano l'uguaglianza in (5.81), quindi ψ é ottima per il nostro problema.
Per $n > 1$ un'altra mappa ottima per lo stesso problema é data dalla funzione:

$$\psi(x) = \begin{cases} x + n & \text{se } x \in [0, 1), \\ x & \text{se } x \in [1, n]. \end{cases} \tag{5.84}$$

Infatti:

$$\psi(x) - x = \begin{cases} n & \text{se } x \in [0, 1), \\ 0 & \text{se } x \in [1, n], \end{cases}$$

quindi il costo di ψ é ancora n:

$$\int_X |\psi(x) - x| \, df_0(x) = \int_0^1 n \, dx = n.$$

Allora anche ψ in (5.84) é una mappa ottima; in realtá in questo caso possiamo mostrare che esiste un numero infinito di mappe ottime. Per ogni ϵ, $0 < \epsilon < 1$, definiamo la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x < 0, \\ n - \epsilon + x & \text{se } x \in [0, 1), \\ x & \text{se } x \in [1, n - \epsilon], \\ 1 + x & \text{se } x \in (n - \epsilon, n], \\ n - \epsilon + x & \text{se } x > n. \end{cases}$$

Per $x \in [0, n]$:

$$f(x) - x = \begin{cases} n - \epsilon & \text{se } x \in [0, 1), \\ 0 & \text{se } x \in [1, n - \epsilon], \\ 1 & \text{se } x \in (n - \epsilon, n]. \end{cases}$$

Allora:

$$\int |f(x) - x| \ df_0 = \int_0^n (f(x) - x) \ dx = \int_0^1 (n - \epsilon) + \int_1^{n-\epsilon} 0 \ dx + \int_{n-\epsilon}^n 1 \ dx = n.$$

Quindi, anche la funzione f ha costo n e quindi é ottima.

Esempio 5.40. Siano $\mu_0 = \mathcal{L}^1 \llcorner [0,1]$ e $\mu_1 = \mathcal{L}^1 \llcorner [1,2]$. Allora la mappa $\psi(t) = 2 - t$ é ottima. Infatti:

$$\int_X |\psi(x) - x| \ df_0(x) = \int_0^1 |2 - 2x| \ dx.$$

Notiamo che poiché $x \leq 1$, allora $2 - 2x \geq 0$ e segue che:

$$\int_X |\psi(x) - x| \ df_0(x) = \int_0^1 (2 - 2x) \ dx = 2 - \left[x^2\right]_{x=0}^{x=1} = 1.$$

La mappa ψ ha costo pari a $1 = n$ ed é ottima, per le stesse considerazioni fatte nell'esempio precedente.

Esempio 5.41. Siano $f_0 = \mathcal{L}^1 \llcorner [-1,1]$ e $f_1 = \delta_{-1} + \delta_1$. In questo caso la mappa ottima é:

$$\psi(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0, \\ 1 & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Vale che:

$$\psi(x) - x = \begin{cases} -1 - x & \text{se } x < 0, \\ 1 - x & \text{se } x > 0, \end{cases}$$

allora in $[-1,1]$ abbiamo che:

$$|\psi(x) - x| = \begin{cases} 1 + x & \text{se } x \in [-1,0), \\ 1 - x & \text{se } x \in (0,1]. \end{cases}$$

Il costo di ψ é:

$$\int_X |\psi(x) - x| \ df_0(x) = \int_{-1}^1 |\psi(x) - x| \ dx = \int_{-1}^0 (1 + x) \ dx + \int_0^1 (1 - x) \ dx$$
$$= \left[x + \frac{x^2}{2}\right]_{x=-1}^{x=0} + \left[x - \frac{x^2}{2}\right]_{x=0}^{x=1} = 1.$$

Scegliamo la funzione lipschitziana $u(x) = |x|$. Allora vale che:

$$\int u(x) \ df_1(x) = \int u(x)(\delta_{-1} + \delta_1) = u(-1) + u(1) = 2,$$

$$\int u(x) \ df_0(x) = \int_{-1}^1 u(x) \ dx = 1.$$

Quindi:

$$\int u(x) \ df_1(x) - \int u(x) \ df_0(x) = 1.$$

Allora la mappa ψ é ottima, perché ψ e u verificano l'uguaglianza in (5.81).