Alcune primitive

Francesco Leonetti [1]

5 giugno 2009

1 Introduzione

La risoluzione di alcune equazioni differenziali ci ha mostrato come sia importante la capacità di trovare le primitive di funzioni assegnate. Consideriamo

$$b(x) = \frac{1}{x(x-3)} \qquad \text{per } x \in I = (0,3) \tag{1.1}$$

e cerchiamo una sua primitiva. A tal fine ci chiediamo se esistono $A \in \mathbb{R}$ e $B \in \mathbb{R}$ tali che

$$\frac{1}{x(x-3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-3} \text{ per ogni } x \in I = (0,3). \tag{1.2}$$

Per rispondere al quesito trasformiamo la somma a secondo membro in un'unica frazione:

$$\frac{A}{x} + \frac{B}{x-3} = \frac{A(x-3)+Bx}{x(x-3)} = \frac{Ax-3A+Bx}{x(x-3)} = \frac{(A+B)x-3A}{x(x-3)}. \tag{1.3}$$

Adesso imponiamo che la frazione al secondo membro della (1.3) uguagli la frazione al primo membro della (1.2): otteniamo il sistema

$$\begin{cases} 0 = A+B \\ 1 = -3A \end{cases} \tag{1.4}$$

[1] Dipartimento di Matematica Pura ed Applicata, Università di L'Aquila, 67100 L'Aquila, Italy.

La seconda equazione ci dà $A = -1/3$; sostituiamo il valore trovato nella prima ed abbiamo $B = 1/3$. Quindi

$$\frac{1}{x(x-3)} = \frac{\frac{-1}{3}}{x} + \frac{\frac{1}{3}}{x-3} = \frac{-1}{3}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x-3}\right) = \frac{-1}{3}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{3-x}\right). \tag{1.5}$$

Poichè $x > 0$ per $x \in I$, si ha

$$\frac{1}{x} = (\ln(x))'. \tag{1.6}$$

Inoltre $3 - x > 0$ per $x \in I$, quindi

$$\frac{1}{3-x} = (-\ln(3-x))'. \tag{1.7}$$

Dunque

$$\begin{aligned}\frac{1}{x} + \frac{1}{3-x} &= (\ln(x))' + (-\ln(3-x))' = (\ln(x) - \ln(3-x))' = \\ &= \left(\ln\left(\frac{x}{3-x}\right)\right)'\end{aligned} \tag{1.8}$$

Allora

$$\begin{aligned}\frac{1}{x(x-3)} &= \frac{-1}{3}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{3-x}\right) = \frac{-1}{3}\left(\ln\left(\frac{x}{3-x}\right)\right)' = \\ &= \left(\frac{-1}{3}\ln\left(\frac{x}{3-x}\right)\right)'\end{aligned} \tag{1.9}$$

Quindi

$$\left(\frac{-1}{3}\ln\left(\frac{x}{3-x}\right)\right)' = \frac{1}{x(x-3)} \qquad \text{per ogni } x \in I = (0,3) \tag{1.10}$$

dunque $P(x) = \frac{-1}{3}\ln\left(\frac{x}{3-x}\right)$ è una primitiva di $b(x) = \frac{1}{x(x-3)}$ in $I = (0,3)$.

2 Il caso generale

Sia $\alpha \in (0, +\infty)$; consideriamo la funzione

$$b(x) = \frac{1}{x(x-\alpha)} \qquad \text{per } x \in I = (0,\alpha). \tag{2.1}$$

e cerchiamo una sua primitiva. A tal fine ci chiediamo se esistono $A \in \mathbb{R}$ e $B \in \mathbb{R}$ tali che

$$\frac{1}{x(x-\alpha)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-\alpha} \text{ per ogni } x \in I = (0, \alpha). \tag{2.2}$$

Per rispondere al quesito trasformiamo la somma a secondo membro in un'unica frazione:

$$\frac{A}{x} + \frac{B}{x-\alpha} = \frac{A(x-\alpha)+Bx}{x(x-\alpha)} = \frac{Ax-\alpha A+Bx}{x(x-\alpha)} = \frac{(A+B)x-\alpha A}{x(x-\alpha)}. \tag{2.3}$$

Adesso imponiamo che la frazione al secondo membro della (2.3) uguagli la frazione al primo membro della (2.2): otteniamo il sistema

$$\begin{cases} 0 = A+B \\ 1 = -\alpha A \end{cases} \tag{2.4}$$

La seconda equazione ci dà $A = -1/\alpha$; sostituiamo il valore trovato nella prima ed abbiamo $B = 1/\alpha$. Quindi

$$\frac{1}{x(x-\alpha)} = \frac{\frac{-1}{\alpha}}{x} + \frac{\frac{1}{\alpha}}{x-\alpha} = \frac{-1}{\alpha}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x-\alpha}\right) = \frac{-1}{\alpha}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{\alpha - x}\right). \tag{2.5}$$

Poichè $x > 0$ per $x \in I$, si ha

$$\frac{1}{x} = (\ln(x))'. \tag{2.6}$$

Inoltre $\alpha - x > 0$ per $x \in I$, quindi

$$\frac{1}{\alpha - x} = (-\ln(\alpha - x))'. \tag{2.7}$$

Dunque

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} + \frac{1}{\alpha - x} &= (\ln(x))' + (-\ln(\alpha-x))' = (\ln(x) - \ln(\alpha - x))' = \\ &= \left(\ln\left(\frac{x}{\alpha - x}\right)\right)' \end{aligned} \tag{2.8}$$

Allora

$$\begin{aligned}\frac{1}{x(x-\alpha)} &= \frac{-1}{\alpha}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{\alpha-x}\right)=\frac{-1}{\alpha}\left(\ln\left(\frac{x}{\alpha-x}\right)\right)'= \\ &= \left(\frac{-1}{\alpha}\ln\left(\frac{x}{\alpha-x}\right)\right)' \qquad (2.9)\end{aligned}$$

Quindi

$$\left(\frac{-1}{\alpha}\ln\left(\frac{x}{\alpha-x}\right)\right)'=\frac{1}{x(x-\alpha)} \qquad \text{per ogni } x\in I=(0,\alpha) \qquad (2.10)$$

dunque $P(x)=\frac{-1}{\alpha}\ln\left(\frac{x}{\alpha-x}\right)$ è una primitiva di $b(x)=\frac{1}{x(x-\alpha)}$ in $I=(0,\alpha)$.

3 Un'altra situazione

Consideriamo ora un'altra situazione. Calcoliamo la derivata di $e^x sen(x)$:

$$(e^x sen(x))'=e^x sen(x)+e^x cos(x). \qquad (3.1)$$

Ora calcoliamo la derivata di $e^x cos(x)$:

$$(e^x cos(x))'=e^x cos(x)-e^x sen(x). \qquad (3.2)$$

Sommando membro a membro le due uguaglianze il termine $e^x sen(x)$ viene eliminato:

$$(e^x sen(x))'+(e^x cos(x))'=2e^x cos(x) \qquad (3.3)$$

quindi

$$(e^x sen(x)+e^x cos(x))'=2e^x cos(x) \qquad (3.4)$$

dunque

$$\left(\frac{e^x sen(x)+e^x cos(x)}{2}\right)'=e^x cos(x) \qquad (3.5)$$

allora la funzione $P(x)=(e^x sen(x)+e^x cos(x))/2$ è una primitiva di $b(x)=e^x cos(x)$ nell'intervallo $(-\infty,+\infty)$. Se sottraiamo membro a membro le due uguaglianze contenute nelle (3.1) e (3.2) il termine $e^x cos(x)$ sparisce ed abbiamo

$$(e^x sen(x))'-(e^x cos(x))'=2e^x sen(x) \qquad (3.6)$$

quindi

$$(e^x sen(x) - e^x cos(x))' = 2e^x sen(x) \tag{3.7}$$

dunque

$$\left(\frac{e^x sen(x) - e^x cos(x)}{2}\right)' = e^x sen(x) \tag{3.8}$$

allora la funzione $P(x) = (e^x sen(x) - e^x cos(x))/2$ è una primitiva di $b(x) = e^x sen(x)$ nell'intervallo $(-\infty, +\infty)$. Usiamo la stessa tecnica per le primitive di $e^{-x}cos(x)$ e $e^{-x}sen(x)$: calcoliamo la derivata del prodotto

$$\big(e^{-x} sen(x)\big)' = -e^{-x} sen(x) + e^{-x} cos(x) \tag{3.9}$$

poi dell'altro

$$\big(e^{-x} cos(x)\big)' = -e^{-x} cos(x) - e^{-x} sen(x). \tag{3.10}$$

Adesso sommiamo membro a membro le due uguaglianze ottenute: il termine $e^{-x}cos(x)$ scompare ed abbiamo

$$\big(e^{-x} sen(x)\big)' + \big(e^{-x} cos(x)\big)' = -2e^{-x} sen(x) \tag{3.11}$$

quindi

$$\big(e^{-x} sen(x) + e^{-x} cos(x)\big)' = -2e^{-x} sen(x) \tag{3.12}$$

dunque

$$\left(\frac{e^{-x} sen(x) + e^{-x} cos(x)}{-2}\right)' = e^{-x} sen(x) \tag{3.13}$$

allora la funzione $P(x) = (e^{-x}sen(x) + e^{-x}cos(x))/(-2)$ è una primitiva di $b(x) = e^{-x}sen(x)$ nell'intervallo $(-\infty, +\infty)$. Adesso sottraiamo membro a membro le uguaglianze contenute nelle (3.9) e (3.10): il termine $e^{-x}sen(x)$ scompare ed abbiamo

$$\big(e^{-x} sen(x)\big)' - \big(e^{-x} cos(x)\big)' = 2e^{-x} cos(x) \tag{3.14}$$

quindi

$$\big(e^{-x} sen(x) - e^{-x} cos(x)\big)' = 2e^{-x} cos(x) \tag{3.15}$$

dunque

$$\left(\frac{e^{-x} sen(x) - e^{-x} cos(x)}{2}\right)' = e^{-x} cos(x) \tag{3.16}$$

allora la funzione $P(x) = (e^{-x}sen(x) - e^{-x}cos(x))/2$ è una primitiva di $b(x) = e^{-x}cos(x)$ nell'intervallo $(-\infty, +\infty)$.

4 Applicazioni

Consideriamo l'equazione differenziale

$$y'(x) = -y(x) + sen(x) \qquad \forall x \in (-\infty, +\infty). \tag{4.1}$$

Essa è lineare non omogenea con coefficiente $a(x) = -1$ e termine noto $b(x) = sen(x)$. Una primitiva di $a(x)$ è $A(x) = -x$. Una primitiva di $e^{-A(x)}b(x) = e^x sen(x)$ è $Q(x) = (e^x sen(x) - e^x cos(x))/2$. Allora tutte le soluzioni della (4.1) sono date da

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{A(x)}[Q(x) + c] = e^{-x}\left[\frac{e^x sen(x) - e^x cos(x)}{2} + c\right] = \\ &= \frac{sen(x) - cos(x)}{2} + ce^{-x} \end{aligned} \tag{4.2}$$

al variare della costante c in $\mathbb{R}$. Consideriamo quest'altra equazione differenziale:

$$y'(x) = y(x) + cos(x) \qquad \forall x \in (-\infty, +\infty). \tag{4.3}$$

Essa è lineare non omogenea con coefficiente $a(x) = 1$ e termine noto $b(x) = cos(x)$. Una primitiva di $a(x)$ è $A(x) = x$. Una primitiva di $e^{-A(x)}b(x) = e^{-x}cos(x)$ è $Q(x) = (e^{-x}sen(x) - e^{-x}cos(x))/2$. Allora tutte le soluzioni della (4.3) sono date da

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{A(x)}[Q(x) + c] = e^{x}\left[\frac{e^{-x} sen(x) - e^{-x} cos(x)}{2} + c\right] = \\ &= \frac{sen(x) - cos(x)}{2} + ce^{x} \end{aligned} \tag{4.4}$$

al variare della costante c in $\mathbb{R}$. Consideriamo quest'altra equazione differenziale:

$$y'(x) = y(x) - \frac{1}{3}y^2(x). \tag{4.5}$$

Essa è a variabili separabili. Guardiamo quando si annulla il secondo membro: per $y(x) = 0$ e per $y(x) = 3$. Allora la funzione costante $y(x) = 0$ è una soluzione dell'equazione differenziale (4.5) e la funzione costante $y(x) = 3$ è un'altra soluzione. Supponiamo che $y(x) - (1/3)y^2(x) \neq 0$ e dividiamo ambo i membri della (4.5) per $y(x) - (1/3)y^2(x)$; otteniamo

$$\frac{1}{y(x) - \frac{1}{3}y^2(x)}y'(x) = 1. \tag{4.6}$$

Cerchiamo una primitiva della funzione $1/(y-(1/3)y^2)$; facciamoci aiutare dalla formula (2.10): per prima cosa trasformiamo la nostra funzione così

$$\frac{1}{y-\frac{1}{3}y^2}=\frac{1}{y(1-\frac{1}{3}y)}=\frac{3}{y(3-y)}=\frac{-3}{y(y-3)}=(-3)\frac{1}{y(y-3)}; \tag{4.7}$$

adesso usiamo la (2.10) con $\alpha=3$ ed abbiamo

$$\begin{aligned}(-3)\frac{1}{y(y-3)} &= (-3)\left(\frac{-1}{3}\ln\left(\frac{y}{3-y}\right)\right)'=\left((-3)\frac{-1}{3}\ln\left(\frac{y}{3-y}\right)\right)'= \\ &= \left(\ln\left(\frac{y}{3-y}\right)\right)' \end{aligned} \tag{4.8}$$

quindi

$$\frac{1}{y-\frac{1}{3}y^2}=\left(\ln\left(\frac{y}{3-y}\right)\right)'. \tag{4.9}$$

Allora

$$\left(\ln\left(\frac{y(x)}{3-y(x)}\right)\right)'=\frac{1}{y(x)-\frac{1}{3}y^2(x)}y'(x). \tag{4.10}$$

Inoltre

$$(x)'=1. \tag{4.11}$$

L'equazione differenziale (4.6) e le due formule (4.10), (4.11) danno luogo alla catena di uguaglianze

$$\left(\ln\left(\frac{y(x)}{3-y(x)}\right)\right)'=\frac{1}{y(x)-\frac{1}{3}y^2(x)}y'(x)=1=(x)' \tag{4.12}$$

quindi

$$\left(\ln\left(\frac{y(x)}{3-y(x)}\right)\right)'=(x)' \tag{4.13}$$

dunque

$$\ln\left(\frac{y(x)}{3-y(x)}\right)=x+c. \tag{4.14}$$

Adesso ricaviamo $y(x)$: la funzione inversa del logaritmo è l'esponenziale; applichiamo tale esponenziale ad ambo i membri della (4.14): l'uguaglianza (4.14) ci dà

$$e^{\ln\left(\frac{y(x)}{3-y(x)}\right)}=e^{x+c} \tag{4.15}$$

Visto che l'esponenziale è l'inversa del logaritmo, abbiamo $e^{\ln(z)} = z$, quindi

$$\frac{y(x)}{3 - y(x)} = e^{x+c}. \tag{4.16}$$

Moltiplichiamo ambo i membri per $3 - y(x)$:

$$y(x) = (3 - y(x))e^{x+c}. \tag{4.17}$$

Portiamo a sinistra tutti i termini contenenti $y(x)$:

$$(1 + e^{x+c})y(x) = 3e^{x+c}. \tag{4.18}$$

Ora dividiamo per $(1 + e^{x+c})$ ed otteniamo

$$y(x) = \frac{3e^{x+c}}{1 + e^{x+c}}. \tag{4.19}$$

Facciamo la verifica: calcoliamo la derivata della funzione $y(x)$ appena trovata

$$y'(x) = \frac{3e^{x+c}(1 + e^{x+c}) - 3e^{x+c}e^{x+c}}{(1 + e^{x+c})^2} = \frac{3e^{x+c}}{(1 + e^{x+c})^2}. \tag{4.20}$$

Adesso calcoliamo $y(x) - \frac{1}{3}y^2(x)$ quando $y(x)$ è data dalla (4.19):

$$\begin{aligned} y(x) - \frac{1}{3}y^2(x) &= \frac{3e^{x+c}}{1 + e^{x+c}} - \frac{1}{3}\left(\frac{3e^{x+c}}{1 + e^{x+c}}\right)^2 = \frac{3e^{x+c}}{1 + e^{x+c}}\left(1 - \frac{1}{3}\frac{3e^{x+c}}{1 + e^{x+c}}\right) \\ &= \frac{3e^{x+c}}{1 + e^{x+c}}\left(\frac{1 + e^{x+c} - e^{x+c}}{1 + e^{x+c}}\right) = \frac{3e^{x+c}}{(1 + e^{x+c})^2}. \end{aligned} \tag{4.21}$$

Dunque

$$y'(x) = \frac{3e^{x+c}}{(1 + e^{x+c})^2} = y(x) - \frac{1}{3}y^2(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}; \tag{4.22}$$

quindi la formula (4.19) ci fornisce infinite soluzioni della (4.5), una per ogni scelta della costante c.