Equazioni differenziali di Bernoulli

Francesco Leonetti [1]

1 giugno 2009

1 Introduzione

Abbiamo già incontrato le equazioni differenziali lineari omogenee

$$y'(x) = a(x)y(x) \tag{1.1}$$

e quelle non omogenee

$$y'(x) = a(x)y(x) + b(x). \tag{1.2}$$

Sia $\alpha \in \mathbb{R}$; considero quest'altra equazione

$$y'(x) = a(x)y(x) + b(x)[y(x)]^\alpha : \tag{1.3}$$

essa viene chiamata equazione di Bernoulli. Se $\alpha = 0$ allora $[y(x)]^0 = 1$ e l'equazione (1.3) diventa la (1.2). Se $\alpha = 1$ allora $[y(x)]^1 = y(x)$ e l'equazione (1.3) diventa la (1.1) dove stavolta il coefficiente di $y(x)$ è $a(x) + b(x)$. Per questi motivi supporremo $\alpha \neq 0$ e $\alpha \neq 1$. Vedremo come ricondurre lo studio dell'equazioni di Bernoulli a quello delle equazioni lineari non omogenee.

2 Riduzione al caso lineare

Consideriamo l'equazione di Bernoulli (1.3); supponiamo che $[y(x)]^\alpha \neq 0$ e dividiamo ambo i membri per $[y(x)]^\alpha$, cioè moltiplichiamo per $[y(x)]^{-\alpha}$:

$$[y(x)]^{-\alpha} y'(x) = a(x)[y(x)]^{1-\alpha} + b(x). \tag{2.1}$$

---

[1] Dipartimento di Matematica Pura ed Applicata, Università di L'Aquila, 67100 L'Aquila, Italy.

Poniamo

$$z(x) = [y(x)]^{1-\alpha} \tag{2.2}$$

e calcoliamo la derivata di $z(x)$:

$$z'(x) = (1-\alpha)[y(x)]^{-\alpha} y'(x) \tag{2.3}$$

Supponiamo che $y(x)$ verifichi l'equazione di Bernoulli; allora possiamo esprimere $y'(x)$ mediante la (2.1):

$$z'(x) = (1-\alpha)\left\{a(x)[y(x)]^{1-\alpha} + b(x)\right\}. \tag{2.4}$$

Ricordiamo la (2.2) e sostituiamo $z(x)$ al posto di $[y(x)]^{1-\alpha}$ nella (2.4):

$$z'(x) = (1-\alpha)\{a(x)z(x) + b(x)\}. \tag{2.5}$$

Quindi $z(x)$ verifica una equazione differenziale lineare non omogenea con coefficiente $(1-\alpha)a(x)$ e termine noto $(1-\alpha)b(x)$. La formula risolutiva per le equazioni differenziali lineari permette di trovare $z(x)$. Per trovare $y(x)$ ricordiamo la (2.2) e ricaviamo $y(x)$:

$$y(x) = [z(x)]^{\frac{1}{1-\alpha}}. \tag{2.6}$$

3 Un esempio

Riportiamo qui l'esempio che Paolo Marcellini e Carlo Sbordone presentano a pagina 636 del libro "Calcolo", Liguori Editore, 2002. Dobbiamo risolvere il problema

$$\begin{cases} y'(x) = 2y(x)tg(x) + \sqrt{y(x)} & \text{per } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \\ y(0) = 1 \end{cases} \tag{3.1}$$

L'equazione differenziale rientra in quella di Bernoulli (1.3) con $a(x) = 2tg(x)$, $b(x) = 1$ e $\alpha = \frac{1}{2}$ Seguiamo il procedimento del paragrafo precedente: supponiamo che $y(x)$ verifichi le due equazioni (3.1) e moltiplichiamo l'equazione differenziale per $[y(x)]^{-\frac{1}{2}}$:

$$[y(x)]^{-\frac{1}{2}} y'(x) = 2[y(x)]^{1-\frac{1}{2}} tg(x) + 1 \tag{3.2}$$

Adesso poniamo

$$z(x) = [y(x)]^{1-\frac{1}{2}} \tag{3.3}$$

quindi

$$z(x) = [y(x)]^{\frac{1}{2}} \tag{3.4}$$

dunque

$$z'(x) = \frac{1}{2}[y(x)]^{-\frac{1}{2}} y'(x) \tag{3.5}$$

Sostituiamo al posto di $[y(x)]^{-\frac{1}{2}} y'(x)$ il secondo membro della (3.2) ed otteniamo

$$z'(x) = \frac{1}{2}\left\{2[y(x)]^{\frac{1}{2}} tg(x) + 1\right\} \tag{3.6}$$

Ci ricordiamo che $[y(x)]^{\frac{1}{2}} = z(x)$ grazie alla (3.4); allora la (3.6) diventa

$$z'(x) = tg(x) z(x) + \frac{1}{2}. \tag{3.7}$$

Dunque $z(x)$ verifica l'equazione lineare non omogenea (1.2) con $a(x) = tg(x)$ e $b(x) = \frac{1}{2}$. Inoltre $z(0) = [y(0)]^{\frac{1}{2}} = [1]^{\frac{1}{2}} = 1$ Risolviamo (3.7) quando $x \in (-\pi/2, \pi/2)$: cerchiamo $A(x)$ tale che

$$A'(x) = tg(x) = \frac{sen(x)}{cos(x)}. \tag{3.8}$$

Prendo

$$A(x) = -\ln(cos(x)) \tag{3.9}$$

e sono a posto. Adesso cerco $Q(x)$ tale che

$$Q'(x) = e^{-A(x)} b(x) = e^{\ln(cos(x))}\frac{1}{2} = \frac{1}{2}cos(x). \tag{3.10}$$

Allora prendo

$$Q(x) = \frac{1}{2} sen(x) \tag{3.11}$$

e sono a posto. Tutte le soluzioni di (3.7) sono date da

$$z(x) = e^{A(x)}\left[Q(x) + c\right] = e^{-\ln(cos(x))}\left[\frac{1}{2}sen(x) + c\right]. \tag{3.12}$$

Ora

$$e^{-\ln(cos(x))} = e^{\ln((cos(x))^{-1})} = (cos(x))^{-1} = \frac{1}{cos(x)} \tag{3.13}$$

quindi la (3.12) diventa

$$z(x) = \frac{\frac{1}{2}sen(x) + c}{cos(x)}. \tag{3.14}$$

Ricordiamo che $z(0) = 1$; possiamo quindi determininare la costante c così:

$$1 = z(0) = \frac{\frac{1}{2}sen(0) + c}{cos(0)} = \frac{0 + c}{1} = c. \tag{3.15}$$

Sostituiamo il valore trovato $1 = c$ nella (3.14) ed otteniamo

$$z(x) = \frac{\frac{1}{2}sen(x) + 1}{cos(x)} \tag{3.16}$$

Mediante la (3.4) ritorniamo a $y(x)$:

$$[y(x)]^{\frac{1}{2}} = z(x) = \frac{\frac{1}{2}sen(x) + 1}{cos(x)}. \tag{3.17}$$

Osserviamo che, per $x \in (-\pi/2, \pi/2)$, abbiamo $cos(x) > 0$; inoltre $sen(x) \geq -1$, quindi $\frac{1}{2}sen(x) + 1 \geq -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2} > 0$; dunque

$$\frac{\frac{1}{2}sen(x) + 1}{cos(x)} > 0. \tag{3.18}$$

Allora

$$y(x) = \left[\frac{\frac{1}{2}sen(x) + 1}{cos(x)}\right]^2. \tag{3.19}$$

Per essere sicuri che tale $y(x)$ sia soluzione del problema (3.1), facciamo la verifica. Per prima cosa, sostituendo $x = 0$ otteniamo

$$y(0) = \left[\frac{\frac{1}{2}sen(0) + 1}{cos(0)}\right]^2 = \left[\frac{0 + 1}{1}\right]^2 = 1 \tag{3.20}$$

Adesso calcoliamo la derivata $y'(x)$:

$$y'(x) = 2\left[\frac{\frac{1}{2}sen(x) + 1}{cos(x)}\right] \frac{\frac{1}{2}cos(x)cos(x) - \left(\frac{1}{2}sen(x) + 1\right)(-sen(x))}{(cos(x))^2}. \tag{3.21}$$

Ora

$$\frac{1}{2}cos(x)cos(x) - \left(\frac{1}{2}sen(x) + 1\right)(-sen(x)) =$$
$$\frac{1}{2}(cos(x))^2 + \frac{1}{2}(sen(x))^2 + sen(x) = \frac{1}{2} + sen(x) \tag{3.22}$$

Sostituendo nella (3.21) otteniamo

$$y'(x) = 2\frac{(\frac{1}{2}sen(x) + 1)(\frac{1}{2} + sen(x))}{(cos(x))^3}. \tag{3.23}$$

Adesso calcoliamo $2y(x)tg(x) + \sqrt{y(x)}$:

$$2y(x)tg(x) + \sqrt{y(x)} = 2\left[\frac{\frac{1}{2}sen(x) + 1}{cos(x)}\right]^2 \frac{sen(x)}{cos(x)} + \frac{\frac{1}{2}sen(x) + 1}{cos(x)}. \tag{3.24}$$

Ora

$$2\left[\frac{\frac{1}{2}sen(x) + 1}{cos(x)}\right]^2 \frac{sen(x)}{cos(x)} =$$
$$2\left[\frac{\frac{1}{4}(sen(x))^2 + 1 + sen(x)}{(cos(x))^2}\right]\frac{sen(x)}{cos(x)} =$$
$$\frac{(\frac{1}{2}(sen(x))^2 + 2 + 2sen(x))sen(x)}{(cos(x))^3} =$$
$$\frac{\frac{1}{2}(sen(x))^3 + 2sen(x) + 2(sen(x))^2}{(cos(x))^3} \tag{3.25}$$

mentre

$$\frac{\frac{1}{2}sen(x) + 1}{cos(x)} = \frac{(\frac{1}{2}sen(x) + 1)(cos(x))^2}{(cos(x))^3} =$$
$$\frac{(\frac{1}{2}sen(x) + 1)(1 - (sen(x))^2)}{(cos(x))^3} =$$
$$\frac{\frac{1}{2}sen(x) + 1 - \frac{1}{2}(sen(x))^3 - (sen(x))^2}{(cos(x))^3} \tag{3.26}$$

Adesso sostituiamo (3.25) e (3.26) nella (3.24):

$$
\begin{aligned}
2y(x)tg(x) + \sqrt{y(x)} &= \\
\frac{\frac{1}{2}(sen(x))^3 + 2sen(x) + 2(sen(x))^2}{(cos(x))^3} &+ \\
\frac{\frac{1}{2}sen(x) + 1 - \frac{1}{2}(sen(x))^3 - (sen(x))^2}{(cos(x))^3} &= \\
\frac{\frac{5}{2}sen(x) + (sen(x))^2 + 1}{(cos(x))^3} &= \\
\frac{\frac{1}{2}sen(x) + (sen(x))^2 + 1 + 2sen(x)}{(cos(x))^3} &= \\
\frac{(sen(x) + 2)(\frac{1}{2} + sen(x))}{(cos(x))^3} &= \\
2\frac{(\frac{1}{2}sen(x) + 1)(\frac{1}{2} + sen(x))}{(cos(x))^3} &= y'(x). \qquad (3.27)
\end{aligned}
$$

Questo conclude la verifica: la funzione $y(x)$ data dalla (3.19) è soluzione del problema (3.1).

4 Qualche esercizio

Per allenarsi consiglio il libro di Paolo Marcellini e Carlo Sbordone "Esercitazioni di matematica", 2^0 volume, parte prima, Liguori Editore, 1995. Ecco qua un paio di esercizi la cui soluzione si trova nel volume appena citato.

$$y'(x) = 2y(x) - e^x(y(x))^2 \tag{4.1}$$

$$y'(x) = \frac{y(x)}{x} - \frac{1}{y(x)} \tag{4.2}$$