

Equazioni differenziali a variabili separabili

Francesco Leonetti ⁽¹⁾

1 giugno 2009

1 Introduzione

Le equazioni differenziali a variabili separabili hanno questa forma

$$y'(x) = f(x)g(y(x)). \quad (1.1)$$

Ecco un primo esempio

$$y'(x) = 2 \{x + x[y(x)]^2\} \quad (1.2)$$

infatti

$$2 \{x + x[y(x)]^2\} = 2x \{1 + [y(x)]^2\} \quad (1.3)$$

quindi siamo nel caso (1.1) con $f(x) = 2x$ e $g(y) = 1 + y^2$. Un secondo esempio è

$$y'(x) = \{\cos[y(x)]\}^2 \quad (1.4)$$

infatti prendo $f(x) = 1$ e $g(y) = \{\cos[y]\}^2$.

2 Come risolverle

Consideriamo l'equazione differenziale a variabili separabili (1.1). Se esiste $y_0 \in \mathbb{R}$ tale che $g(y_0) = 0$ allora prendo la funzione costante

$$y(x) = y_0 \quad (2.1)$$

⁽¹⁾ Dipartimento di Matematica Pura ed Applicata, Università di L'Aquila, 67100 L'Aquila, Italy.

Risulta

$$y'(x) = 0 = g(y_0) = f(x)g(y_0) = f(x)g(y(x)) \quad (2.2)$$

allora la funzione costante (2.1) è soluzione dell'equazione (1.1).

Se $g(y(x)) \neq 0$ allora divido ambo i membri della (1.1) per $g(y(x))$:

$$\frac{1}{g(y(x))}y'(x) = f(x). \quad (2.3)$$

Sia $F(x)$ una primitiva di $f(x)$, cioè

$$F'(x) = f(x). \quad (2.4)$$

Sia $G(y)$ una primitiva di $\frac{1}{g(y)}$, cioè

$$G'(y) = \frac{1}{g(y)}. \quad (2.5)$$

La formula della derivata della funzione composta ci dà

$$(G(y(x)))' = G'(y(x))y'(x) = \frac{1}{g(y(x))}y'(x) = f(x), \quad (2.6)$$

quindi

$$(G(y(x)))' = f(x). \quad (2.7)$$

Confrontiamo la (2.4) con la (2.7): le funzioni $G(y(x))$ e $F(x)$ sono due primitive della stessa $f(x)$; se siamo in un intervallo, allora esse differiscono per una costante c :

$$(G(y(x))) = F(x) + c. \quad (2.8)$$

Dobbiamo ricavare $y(x)$; per questo ci serve una funzione ψ verificante

$$\psi(G(y)) = y. \quad (2.9)$$

Una tale funzione è chiamata funzione inversa di G . Ad esempio, se $G(y) = \sqrt{y}$, allora $\psi(z) = z^2$; infatti $\psi(G(y)) = (\sqrt{y})^2 = y$. Ecco un altro esempio: prendo $G(y) = \arctg(y)$; allora $\psi(z) = tg(z)$; infatti $\psi(G(y)) = tg(\arctg(y)) = y$. Torniamo alla risoluzione dell'equazione differenziale; sia ψ verificante (2.9); osserviamo che

$$z_1 = z_2 \implies \psi(z_1) = \psi(z_2). \quad (2.10)$$

In virtù della (2.8), possiamo applicare la (2.10) con $z_1 = G(y(x))$ e $z_2 = F(x) + c$: abbiamo

$$\psi(G(y(x))) = \psi(F(x) + c) \quad (2.11)$$

Ricordiamo che ψ verifica la (2.9), quindi

$$\psi(G(y(x))) = y(x). \quad (2.12)$$

Dunque il primo membro della (2.11) è pari a $y(x)$ e la (2.11) diventa

$$y(x) = \psi(F(x) + c). \quad (2.13)$$

3 Un esempio

Riportiamo qui l'esempio che Paolo Marcellini e Carlo Sbordone presentano a pagina 640 del libro "Calcolo", Liguori Editore, 2002. Dobbiamo risolvere l'equazione differenziale

$$y'(x) = (\cos(y(x)))^2. \quad (3.1)$$

Ricordiamo che $\cos(y) = 0$ per $y = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ogni volta che k è un intero (positivo, negativo o nullo). Allora, fissato un intero k , considero la funzione costante

$$y(x) = \frac{\pi}{2} + k\pi. \quad (3.2)$$

Risulta

$$y'(x) = 0 = 0^2 = (\cos(\frac{\pi}{2} + k\pi))^2 = (\cos(y(x)))^2 \quad (3.3)$$

quindi la funzione costante (3.2) è soluzione di (3.1). Dunque abbiamo infinite soluzioni costanti, una per ogni scelta dell'intero k .

Supponiamo ora che $\cos(y(x)) \neq 0$; allora possiamo dividere ambo i membri della (3.1) per $(\cos(y(x)))^2$:

$$\frac{1}{(\cos(y(x)))^2} y'(x) = 1. \quad (3.4)$$

Una primitiva di $\frac{1}{(\cos(y))^2}$ è $\operatorname{tg}(y)$ quindi

$$(\operatorname{tg}(y(x)))' = \frac{1}{(\cos(y(x)))^2} y'(x). \quad (3.5)$$

Una primitiva di 1 è x , quindi l'uguaglianza (3.4) può essere scritta anche così

$$(tg(y(x)))' = (x)' \quad (3.6)$$

dunque

$$tg(y(x)) = x + c \quad (3.7)$$

infine

$$y(x) = arctg(x + c). \quad (3.8)$$

Facciamo la verifica. Se $y(x)$ è data dalla (3.8), allora

$$y'(x) = \frac{1}{1 + (x + c)^2} \quad (3.9)$$

Calcoliamo ora il secondo membro della (3.1) quando $y(x)$ è data dalla (3.8):

$$(\cos(y(x)))^2 = (\cos(arctg(x + c)))^2. \quad (3.10)$$

Ricordiamo la formula

$$\cos(\theta) = \frac{1}{1 + (tg(\theta))^2} \quad (3.11)$$

che può essere ricavata così: dall'uguaglianza $(\cos(\theta))^2 + (\sin(\theta))^2 = 1$, ricaviamo $(\sin(\theta))^2 = 1 - (\cos(\theta))^2$; dividendo per $(\cos(\theta))^2$, otteniamo $(tg(\theta))^2 = \frac{1}{(\cos(\theta))^2} - 1$; quindi $1 + (tg(\theta))^2 = \frac{1}{(\cos(\theta))^2}$ e da qui si ottiene la (3.11). Grazie alla formula (3.11), la (3.10) diventa

$$(\cos(y(x)))^2 = \frac{1}{1 + (tg(arctg(x + c)))^2} = \frac{1}{1 + (x + c)^2}. \quad (3.12)$$

Questa uguaglianza e la (3.9) mostrano che la funzione $y(x)$ scritta nella (3.8) è soluzione della (3.1).

4 Qualche esercizio

Oltre a quelli del libro di Paolo Marcellini e Carlo Sbordone "Esercitazioni di matematica", 2^o volume, parte prima, Liguori Editore, 1995, ecco qua un paio di esercizi.

$$y'(x) = (\cos(x))e^{-y(x)} \quad (4.1)$$

$$y'(x) = \frac{2x}{1 + x^2} \frac{1}{\cos(y(x))} \quad (4.2)$$