Laboratorio teorico-pratico per la preparazione alle gare di matematica

Liceo Scientifico A. Einstein, Teramo

Relatore: Rosanna Tupitti
e-mail: rosannatupitti@gmail.com
web: http://www.rotupitti.it/

26 novembre 2014

Libri di riferimento

- Paolini G. - La matematica delle Olimpiadi, La Scuola 2012
- Gobbino M. - Schede olimpiche, U.M.I. 2010
- Conti F., Barsanti M. - Le Olimpiadi della Matematica, Problemi dalle gare italiane, Zanichelli, 2002
- Materiale del sito http://www.rotupitti.it/

Geometria olimpica

- Geometria euclidea di base (biennio s.s.)
- Geometria dei triangoli
- Geometria dei quadrilateri
- Aree di regioni triangolari
- Aree di regioni quadrangolari
- Aree di regioni trapezoidali
- Aree di parallelogrammi

Notazioni standard del triangolo

- A, B, C sono i vertici
- α, β, γ sono gli angoli
- a, b, c sono le lunghezze dei lati BC, CA, AB
- $p = (a + b + c)/2$
- $S = [ABC]$ indica l'area di $\triangle ABC$
- r, R sono i raggi delle circonferenze inscritta e circoscritta
- r_a, r_b, r_c raggi delle circonferenze exincritte
- h_a, h_b, h_c lunghezze delle altezze
- m_a, m_b, m_c lunghezze delle mediane
- O : **circocentro**, punto di intersezione degli assi
- G : **baricentro**, punto di intersezione delle mediane
- H : **ortocentro**, punto di intersezione delle altezze
- I : **incentro**, punto di intersezione delle bisettrici

Teorema di Apollonio

$$\boxed{a^2 + 4m_a^2 = 2b^2 + 2c^2} \qquad \text{e cicliche}$$

Lunghezza delle mediane

$$\boxed{m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}} \qquad \text{e cicliche}$$

Teorema del coseno (teorema di Carnot)

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha} \qquad \text{e cicliche}$$

Formula di Erone

$$\boxed{S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

Teorema della bisettrice interna. La bisettrice interna di un angolo divide (internamente) il lato opposto in due parti proporzionali ai lati dell'angolo. Quindi se D è il punto in cui la bisettrice interna uscente da A divide il lato BC allora

$$\boxed{BD : DC = AB : AC}$$

Teorema della bisettrice esterna. La bisettrice esterna di un angolo divide (esternamente) il lato opposto in due parti proporzionali ai lati dell'angolo. Quindi se D è il punto in cui la bisettrice interna uscente da A divide il lato B allora

$$\boxed{BD : DC = AB : AC}$$

Lunghezza della bisettrice interna

$$\boxed{w_a = \frac{2bc}{b+c} \cdot \cos\frac{\alpha}{2} = \frac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)}}$$

Definizione di ceviana. Dicesi *ceviana* un segmento che congiunge un vertice con un punto del lato opposto.

Teorema di Ceva. Tre ceviane AD, BE, CF di un triangolo $\triangle ABC$ concorrono se e solo se

$$\boxed{\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1}$$

Teorema di Menelao. Tre punti $D \in BC$, $E \in AC$, $F \in AB$ sono allineati se e solo se

$$\boxed{\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot = -1}$$

Teorema di Stewart. Se $D \in BC$, $m = BD$, $n = DC$, $d = AD$ abbiamo

$$\boxed{a\left(d^2 + mn\right) = mb^2 + nc^2}$$

Teorema di Van Aubel. Se tre ceviane AD, BE, CF concorrono in un punto P allora

$$\boxed{\frac{PA}{AD} = \frac{AF}{FB} + \frac{AE}{EC}}$$

Teorema di Tolomeo. Se $ABCD$ è un quadrilatero semplice ciclico allora

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC$$

Teorema di Brahmagupta. L'area di un quadrilatero ciclico $ABCD$ è data da

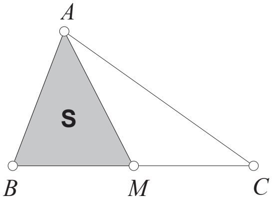
$$[ABCD] = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

Teorema. L'area di un quadrilatero bicentrico è data da

$$[ABCD] = \sqrt{abcd}$$

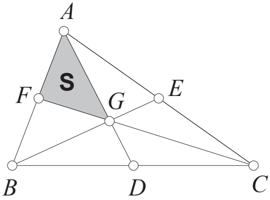
Teorema. Una mediana divide un triangolo in due triangoli equivalenti

$$S = \frac{1}{2}[ABC]$$



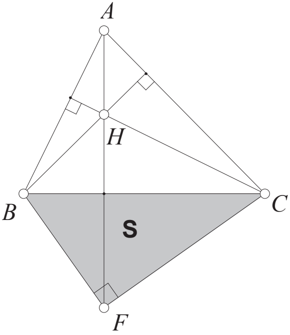
Teorema. Le tre mediane dividono un triangolo in sei triangoli equivalenti.

$$S = \frac{1}{6}[ABC]$$



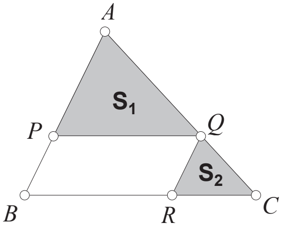
Teorema. Se ABC è un triangolo con ortocentro H ed $F \in AH$ tale che $\angle BFC = 90°$, allora:

$$[BFC]^2 = [ABC] \cdot [BCH]$$



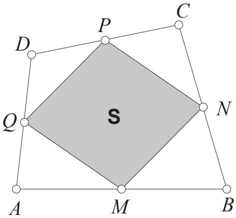
Teorema. Se ABC è un triangolo e $PQ \parallel BC$ allora

$$[ABC] = S_1 + S_2 + 2 \cdot \sqrt{S_1 \cdot S_2}$$



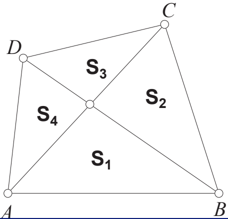
Teorema. I punti medi M, N, P, Q dei lati del quadrilatero $ABCD$ sono i vertici di un parallelogramma (detto *di Varignon*) la cui area è la metà di quella di $ABCD$.

$S = \frac{1}{2}[ABCD]$



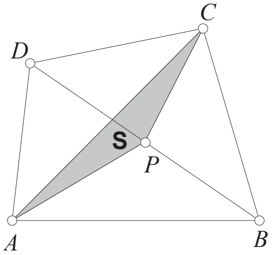
Teorema. Se tracciamo le diagonali del quadrilatero $ABCD$ si formano quattro regioni triangolari tali che

$S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4$



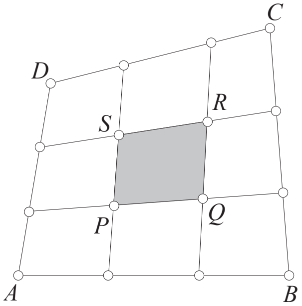
Teorema. Se P è il punto medio della diagonale BD del quadrilatero $ABCD$ allora

$$[APC] = \frac{[ABC] - [ACD]}{2}$$



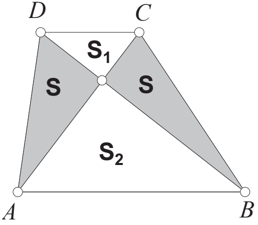
Teorema. Se uniamo i punti di trisezione dei lati di un quadrilatero $ABCD$ si forma un quadrilatero centrale $PQRS$ la cui area è 1/9 di quella di $ABCD$.

$$[PQRS] = \frac{1}{9}[ABCD]$$



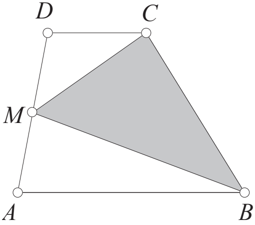
Teorema. Se $ABCD$ è un trapezio allora i triangoli:

$S = \sqrt{S_1 \cdot S_2}$



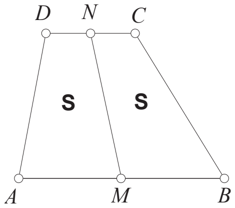
Teorema. Se $ABCD$ è un trapezio e M è il punto medio di AD allora

$[BCM] = \frac{1}{2}[ABCD]$



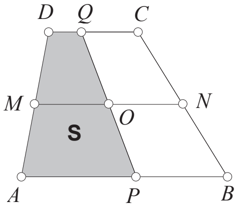
Teorema. Se $ABCD$ è un trapezio e M, N sono i punti medi delle basi AB, CD allora

$[AMND] = [MBCN]$



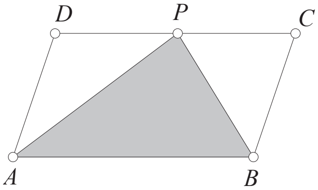
Teorema. Sia $ABCD$ è un trapezio, siano M, N i punti medi dei lati AD, BC e sia O il punto medio di MN, sia $P \in AB$ e sia $Q = OP \cap CD$. Abbiamo

$[APQD] = \frac{1}{2}[ABCD]$



Teorema. Se $ABCD$ è un parallelogramma e $P \in CD$ allora

$$[ABP] = \frac{1}{2}[ABCD]$$



Teorema. Se $ABCD$ è un parallelogramma e P è un punto interno allora

$$[APD] + [BCP] = \frac{1}{2}[ABCD]$$