Laboratorio teorico-pratico per la preparazione alle gare di matematica

Liceo Scientifico A. Einstein, Teramo

Relatore: Rosanna Tupitti
e-mail: rosannatupitti@gmail.com
web: http://www.rotupitti.it/

17 dicembre 2014

Libri di riferimento

- Paolini G. - La matematica delle Olimpiadi, La Scuola 2012
- Gobbino M. - Schede olimpiche, U.M.I. 2010
- Conti F., Barsanti M. - Le Olimpiadi della Matematica, Problemi dalle gare italiane, Zanichelli, 2002
- Materiale del sito http://www.rotupitti.it/

- Principio Fondamentale del Calcolo Combinatorio (PFC)
- Principio di Inclusione-Esclusione (PIE)
- Corrispondenza biunivoca
- Principio dei cassetti (o principio di Dirichlet)
- Tecnica del doppio conteggio (o principio di Fubini)
- Alcune somme notevoli
- Ricorrenze
- Permutazioni, disposizioni, combinazioni e ... altro

Regola del prodotto. Il prodotto cartesiano $A \times B$ di due insiemi A , B di rispettive cardinalità m, n ha cardinalità :

$$|A \times B| = |A| \cdot |B| = m \cdot n$$

La regola del prodotto si generalizza in modo ovvio al prodotto cartesiano di più insiemi: se $A_1, A_2, \cdots, A_k$ sono k insiemi di rispettive cardinalità $n_1, n_2, \cdots, n_k$ si ha :

$$|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k| = n_1 \cdot n_2 \cdots n_k$$

Principio fondamentale del calcolo combinatorio (PFC). *Supponiamo che un problema P possa essere scomposto in k sottoproblemi indipendenti P_1,P_2, $\cdots$, P_k. Se il sottoproblema P_1 può essere risolto in n_1 modi, il sottoproblema P_2 in n_2 modi, $\cdots$, il sottoproblema P_k in n_k modi, allora il problema P può essere risolto in $n_1 \cdot n_2 \cdots n_k$ modi.*

Principio di Inclusione-Esclusione (PIE)

Principio di inclusione esclusione (PIE). Se A e B sono due insiemi finiti allora:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| \qquad (*)$$

La formula (*) può essere generalizzata nel modo seguente, per trovare la cardinalità dell'unione di n insiemi finiti $A_1, A_2, \cdots, A_n$:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| =$$
$$\sum_{1 \leq i \leq n} |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| + \cdots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|$$

Corrispondenza biunivoca

Corrispondenza Biunivoca. Due insiemi finiti A e B hanno la stessa cardinalità se e solo se esiste una funzione biettiva

$$f : A \to B$$

Principio dei cassetti (pigeonhole principle)
Esistono diverse formulazioni equivalenti:

- **versione base.** Se più di n piccioni si dispongono in n buchi allora almeno due piccioni devono occupare lo stesso buco.
- Se A e B sono insiemi finiti ed A ha cardinalità maggiore di B allora ogni funzione $f : A \to B$ non può essere iniettiva.
- **versione estesa.** Se $kn + 1$ piccioni si dispongono in n buchi allora qualche buco conterrà almeno $k + 1$ piccioni.

Il **metodo del doppio conteggio** (**double counting**), detto anche **principio di Fubini**, è una tecnica di dimostrazione che consiste nel contare in due modi diversi gli elementi di un insieme con lo scopo di mostrare che le due espressioni risultanti sono uguali. Questa tecnica può essere formalizzata nel modo seguente:

Siano dati due insiemi finiti $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$, $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$. Se $S \subseteq A \times B$ allora:

$$|S| = \sum_{i=1}^{m} |S(a_i, *)| = \sum_{j=1}^{n} |S(*, b_j)|$$

dove:

$$S(a_i, *) = \{(a, b) \in S \mid a = a_i\}, \quad S(*, b_j) = \{(a, b) \in S \mid b = b_j\}$$

Alcune somme notevoli

- $1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$
- $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$
- $1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 8 + \cdots + n \cdot 2^n = (n-1) \cdot 2^{n+1} + 2$
- $1 \cdot a + 2 \cdot a^2 + \cdots + n \cdot a^n = \dfrac{a - (n+1)a^{n+1} + na^{n+2}}{(1-a)^2}$
- $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + n \cdot (n+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$
- $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \cdots + n \cdot (n+1) \cdot (n+2) = \dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$
- $\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \cdots + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}$

Ricorrenze: Torri di Hanoi

Ci sono tre pioli ed n dischi circolari di grandezza crescente inseriti su uno dei pioli con il disco più grande in basso. Questi dischi devono essere spostati uno alla volta su un altro dei pioli, ma non è permesso mettere un disco di diametro maggiore su uno di diametro più piccolo. Qual è il minimo numero di mosse necessarie per il trasferimento?

Sia h_n il numero di mosse necessarie per spostare n dischi. Si dimostra facilmemnte che i numeri h_n soddisfano la ricorrenza:

$$h_n = 2h_{n-1} + 1$$

da cui si ricava la formula chiusa

$$h_n = 2^n - 1$$

I numeri di Fibonacci f_n sono definiti mediante la relazione di ricorrenza

$$f_1 = 1, \qquad f_2 = 1$$
$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}\ , \forall n \geqslant 3$$

dalla quale si può ricavare la **formula di Binet**:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

Si dice **permutazione semplice** di n oggetti $a_1, a_2, \ldots, a_n$ una corrispondenza biunivoca dell'insieme $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ in sé. In altre parole una permutazione è un gruppo ordinato formato da tutti gli oggetti $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Siano dati n oggetti non tutti distinti, di k tipi diversi. Supponiamo che vi siano n_1 oggetti uguali ad a_1, n_2 oggetti uguali ad a_2, $\cdots$,n_k oggetti uguali ad a_k:

$$\underbrace{a_1, a_1, \ldots, a_1}_{n_1} \underbrace{a_2, a_2, \ldots, a_2}_{n_2} \ldots \underbrace{a_k, a_k, \ldots, a_k}_{n_k}$$

con $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$.

Si dice **permutazione con ripetizione** un gruppo ordinato formato con tutti gli n oggetti, ognuno ripetuto secondo la rispettiva molteplicità.

Disposizioni

Dati n oggetti $a_1, a_2, \cdots, a_n$ ed un numero intero $k \leqslant n$ si dice **disposizione semplice di classe** k un gruppo ordinato di k oggetti scelti dagli n oggetti disponibili. Due disposizioni sono distinte se differiscono per l'ordine o per qualche elemento.

Dati n oggetti $a_1, a_2, \cdots, a_n$ ed un numero intero k si dice **disposizione con ripetizione di classe** k un gruppo ordinato di k oggetti, eventualmente ripetuti, scelti dagli n oggetti disponibili. Due disposizioni sono distinte se differiscono per l'ordine o per qualche elemento.

Dati n oggetti $a_1, a_2, \cdots, a_n$ ed un numero intero $k \leqslant n$ si dice **disposizione circolare (semplice) di classe** k un gruppo ordinato di k oggetti scelti dagli n oggetti disponibili e disposti su una circonferenza.

Si dice **permutazione circolare (semplice)** di n oggetti $a_1, a_2, \ldots, a_n$ una diposizione circolare di classe $k = n$.

Dati n oggetti $a_1, a_2, \cdots, a_n$ ed un numero intero $k \leqslant n$, si dice **combinazione semplice di classe** k un insieme di k oggetti scelti dagli n oggetti disponibili. In altre parole le combinazioni di classe k non sono altro che i k-sottoinsiemi di $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Due combinazioni sono distinte se differiscono per qualche elemento.

Dati n oggetti $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ed un numero intero k si dice **combinazione con ripetizione di classe** k un gruppo di k oggetti, eventualmente ripetuti, scelti dagli n oggetti disponibili. Una combinazione con ripetizione di classe k è detta anche un k-**multinsieme**. Si dice **molteplicità** di un elemento a_i, indicata con $m(a_i)$, il numero di volte che esso compare nella combinazione. Due combinazioni con ripetizione sono da ritenersi distinte se differiscono per qualche elemento, mentre sono da ritenersi uguali se differiscono solo per l'ordine con cui sono disposti gli elementi.