Metodo iterativo per risolvere

$$\begin{cases} y_1 = y_2 + (y_3/2) \\ y_2 = y_1 + (y_3/2) \\ y_3 = 0 \\ y_1 + y_2 + y_3 = 1 \end{cases}$$

Guardo $y_1, y_2, y_3$ come variabili; ad ogni passo esse assumeranno dei valori: $y_1^{(5)}$ sarà il valore della variabile $y_1$ al passo 5.

$y_i^{(k)}$ ← passo k

↖ variabile i

<u>Passo 1</u>: per verificare la condizione

$$y_1 + y_2 + y_3 = 1$$

do' a tutte e tre le variabili lo stesso valore 1/3 (cioè 1 diviso il numero di variabili che è 3):

$$y_1^{(1)} = 1/3$$

$$y_2^{(1)} = 1/3$$

$$y_3^{(1)} = 1/3$$

<u>Passo 2</u>: per trovare il valore di $y_1$ al passo 2 guardo la prima equazione

$$y_1 = y_2 + (y_3/2)$$

e pongo

$$y_1^{(2)} = y_2^{(1)} + (y_3^{(1)}/2)$$

cioè metto l'indice 2 del passo nel pezzo di sinistra e l'indice 1 del passo nel pezzo di destra dell'equazione.

Questo vuol dire che, per avere il valore di $y_1$ al passo 2, utilizzo i valori al passo 1 delle variabili che sono a destra del segno "=" nella equazione.

Allo stesso modo, per avere il valore di $y_2$ al passo 2 guardo la seconda equazion

$$y_2 = y_1 + (y_3/2)$$

e pongo

$$y_2^{(2)} = y_1^{(1)} + (y_3^{(1)}/2)$$

Infine, per avere il valore di $y_3$ al passo 2 guardo la terza equazione

$$y_3 = 0$$

e pongo

$$y_3^{(2)} = 0$$

Riassumendo, per avere i valori delle variabili $y_1, y_2, y_3$ al passo 2 pongo

$$y_1^{(2)} = y_2^{(1)} + (y_3^{(1)}/2)$$

$$y_2^{(2)} = y_1^{(1)} + (y_3^{(1)}/2)$$

$$y_3^{(2)} = 0$$

i valori al passo 1 sono noti; eseguendo le operazioni scritte sopra calcolo i valori delle variabili al passo 2.

Passo 3 : per avere i valori delle variabili $y_1, y_2, y_3$ al passo 3 pongo

$$y_1^{(3)} = y_2^{(2)} + (y_3^{(2)}/2)$$

$$y_2^{(3)} = y_1^{(2)} + (y_3^{(2)}/2)$$

$$y_3^{(3)} = 0$$

i valori al passo 2 sono noti; eseguendo le operazioni scritte sopra calcolo i valori delle variabili al passo 3.

In generale, se ho i valori delle variabili al passo k, posso avere i valori delle variabili al passo k+1 ponendo

$$y_1^{(k+1)} = y_2^{(k)} + (y_3^{(k)}/2)$$

$$y_2^{(k+1)} = y_1^{(k)} + (y_3^{(k)}/2)$$

$$y_3^{(k+1)} = 0$$

Il metodo descritto funziona quando, dopo un certo numero di passi, le variabili non cambiano più il loro valore.

Ad esempio, al passo 81 ritrovo i valori del passo 80:

$$y_1^{(81)} = y_1^{(80)}$$

$$y_2^{(81)} = y_2^{(80)}$$

$$y_3^{(81)} = y_3^{(80)}$$

Indichiamo con $f_1$, $f_2$, $f_3$ i tre valori, cioè

$$y_1^{(81)} = y_1^{(80)} = f_1$$

$$y_2^{(81)} = y_2^{(80)} = f_2$$

$$y_3^{(81)} = y_3^{(80)} = f_3$$

Affermo che $f_1, f_2, f_3$ sono le soluzioni cercate. Infatti, controlliamo la prima equazione; per fare ciò, scriviamo la relazione che definisce $y_1$ al passo 81:

$$y_1^{(81)} = y_2^{(80)} + (y_3^{(80)}/2)$$

adesso ricordiamo che

$$f_1 = y_1^{(81)}$$

mentre

$$y_2^{(80)} = f_2$$

$$y_3^{(80)} = f_3$$

quindi

$$f_1 = y_1^{(81)} = y_2^{(80)} + (y_3^{(80)}/2) = f_2 + (f_3/2)$$

dunque $$f_1 = f_2 + (f_3/2)$$

quindi la prima equazione
è verificata da $f_1, f_2, f_3$.

Per controllare la seconda equazione, scriviamo la relazione che definisce $y_2$ al passo 81

$$y_2^{(81)} = y_1^{(80)} + (y_3^{(80)}/2)$$

adesso ricordiamo che

$$f_2 = y_2^{(81)}$$

mentre

$$y_1^{(80)} = f_1$$

$$y_3^{(80)} = f_3$$

quindi

$$f_2 = y_2^{(81)} = y_1^{(80)} + (y_3^{(80)}/2) = f_1 + (f_3/2)$$

dunque

$$f_2 = f_1 + (f_3/2)$$

Cerchiamo di capire dove sfruttiamo il fatto che le variabili non cambiano più il loro valore

$$y_1^{(81)} = y_1^{(80)} = f_1$$

$$y_2^{(81)} = y_2^{(80)} = f_2$$

$$y_3^{(81)} = y_3^{(80)} = f_3$$

$$y_1^{(81)} = y_2^{(80)} + (y_3^{(80)}/2)$$

$$y_2^{(81)} = y_1^{(80)} + (y_3^{(80)}/2)$$

qui uso lo stesso valore $f_1$

qui uso lo stesso valore $f_2$

In realtà non è necessario che i valori delle tre variabili diventino costanti da un certo passo in poi.

Ci basta che i limiti di $y_i^{(k)}$, per $k \to +\infty$, esistano e siano finiti. In tal caso, siano

$$\lim_{k \to +\infty} y_1^{(k)} = L_1$$

$$\lim_{k \to +\infty} y_2^{(k)} = L_2$$

$$\lim_{k \to +\infty} y_3^{(k)} = L_3$$

Affermo che $L_1$, $L_2$, $L_3$ sono le soluzioni cercate. Infatti, controlliamo la prima equazione.

Per fare ciò, scriviamo la relazione che definisce $y_1$ al passo $k+1$:

$$y_1^{(k+1)} = y_2^{(k)} + \left( y_3^{(k)}/2 \right)$$

adesso passiamo al limite per $k \to +\infty$:

poiché

$$\lim_{k \to +\infty} y_1^{(k)} = L_1$$

allora

$$\lim_{k \to +\infty} y_1^{(k+1)} = L_1$$

Però

$$y_1^{(k+1)} = y_2^{(k)} + \left( y_3^{(k)}/2 \right)$$

quindi

$$\lim_{k \to +\infty} y_1^{(k+1)} = \lim_{k \to +\infty} \left[ y_2^{(k)} + \left( y_3^{(k)}/2 \right) \right] = L_2 + (L_3/2)$$

L'unicità del limite di $y_1^{(k+1)}$ assicura che

$$L_1 = \lim_{k \to +\infty} y_1^{(k+1)} = L_2 + (L_3/2)$$

dunque

$$L_1 = L_2 + (L_3/2)$$

quindi la prima equazione

è verificata da $L_1$, $L_2$, $L_3$.

Allo stesso modo si verificano

la seconda e la terza equazione.