Una domanda sul metodo iterativo per risolvere il sistema

Abbiamo mostrato che vengono verificate le prime tre equazioni del sistema: ma la quarta?

Ecco la risposta.

Nel caso di questo sistema il metodo iterativo ha questa proprietà:
la somma dei valori di tutte le variabili al passo k+1 è uguale alla somma dei valori di tutte le variabili al passo k.
Al passo 1, per costruzione, tale somma è 1;
quindi rimane 1 anche a tutti i passi

successivi, compreso quello finale che ci dà i valori delle soluzioni; dunque la somma di tutte le soluzioni fa 1, quindi è verificato anche la quarta equazione.

Mostriamo dunque che

$$y_1^{(k+1)} + y_2^{(k+1)} + y_3^{(k+1)} = y_1^{(k)} + y_2^{(k)} + y_3^{(k)}$$

infatti

$$y_1^{(k+1)} = y_2^{(k)} + (y_3^{(k)}/2)$$

$$y_2^{(k+1)} = y_1^{(k)} + (y_3^{(k)}/2)$$

$$y_3^{(k+1)} = 0$$

allora

$$y_1^{(k+1)} + y_2^{(k+1)} + y_3^{(k+1)} = y_2^{(k)} + (y_3^{(k)}/2) +$$

$$+ y_1^{(k)} + (y_3^{(k)}/2) + 0 =$$

$$= y_2^{(k)} + y_3^{(k)} + y_1^{(k)}$$

Ricordiamo che

$$y_1^{(1)} = 1/3$$

$$y_2^{(1)} = 1/3$$

$$y_3^{(1)} = 1/3$$

quindi

$$y_1^{(1)} + y_2^{(1)} + y_3^{(1)} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$$

Come affermato.

Vediamo ora il sistema associato al quarto esempio di pagine web

$$y_1 = (y_2/2)$$

$$y_2 = y_3 + y_4$$

$$y_3 = (y_1/3) + y_5$$

$$y_4 = (y_1/3)$$

$$y_5 = (y_1/3) + (y_2/2)$$

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 1$$

Per risolverlo usiamo il metodo iterativo in cui i valori delle variabili al passo k+1 sono legati ai valori delle variabili al passo k mediante le equazioni del sistema tranne l'ultima:

$$y_1^{(k+1)} = (y_2^{(k)}/2)$$

$$y_2^{(k+1)} = y_3^{(k)} + y_4^{(k)}$$

$$y_3^{(k+1)} = (y_1^{(k)}/3) + y_5^{(k)}$$

$$y_4^{(k+1)} = (y_1^{(k)}/3)$$

$$y_5^{(k+1)} = (y_1^{(k)}/3) + (y_2^{(k)}/2)$$

6

Mostriamo che, anche in questo caso, la somma dei valori delle variabili al passo k+1 è uguale a quella al passo k, cioè

$$y_1^{(k+1)} + y_2^{(k+1)} + y_3^{(k+1)} + y_4^{(k+1)} + y_5^{(k+1)} =$$

$$= y_1^{(k)} + y_2^{(k)} + y_3^{(k)} + y_4^{(k)} + y_5^{(k)}$$

infatti

$$y_1^{(k+1)} + y_2^{(k+1)} + y_3^{(k+1)} + y_4^{(k+1)} + y_5^{(k+1)} =$$

$$= \left(y_2^{(k)}/2\right) + y_3^{(k)} + y_4^{(k)} + \left(y_1^{(k)}/3\right) + y_5^{(k)} +$$

$$+ \left(y_1^{(k)}/3\right) + \left(y_1^{(k)}/3\right) + \left(y_2^{(k)}/2\right) =$$

$$= y_2^{(k)} + y_3^{(k)} + y_4^{(k)} + y_1^{(k)} + y_5^{(k)}$$