

Cognome.....

Nome.....

Matricola..... Corso di Laurea.....

Riservato al docente

Esercizio 1	Esercizio 2	Esercizio 3	Esercizio 4	Esercizio 5	Esercizio 6	Voto finale

**Esercizio 1**

[5 punti]

Calcolare il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1 + 5x}{\sin x}$$

Risoluzione

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1 + 5x}{\sin x} \xrightarrow{\text{De L'Hospital}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} \cdot 3 + 5}{\cos x} = 8$

$e^0 - 1 + 0 = 0$   
 $e^0 \cdot 3 + 5 = 8$   
 $\sin x \rightarrow 0$   
 $\cos x \rightarrow 1$

o/ve

$$\frac{e^{3x} - 1 + 5x}{\sin x} = \frac{e^{3x} - 1}{\sin x} + \frac{5x}{\sin x} = \left( \frac{e^{3x} - 1}{3x} \cdot \frac{3x}{\sin x} + 5 \frac{x}{\sin x} \right)$$

$1 \cdot 3 \cdot 1 + 5 \cdot 1 = 8$

$\downarrow$        $\downarrow$        $\downarrow$   
 1      1      1

## Esercizio 2

[6 punti]

Determinare, al variare del parametro  $k \in \mathbb{R}$ , il numero di soluzioni dell'equazione

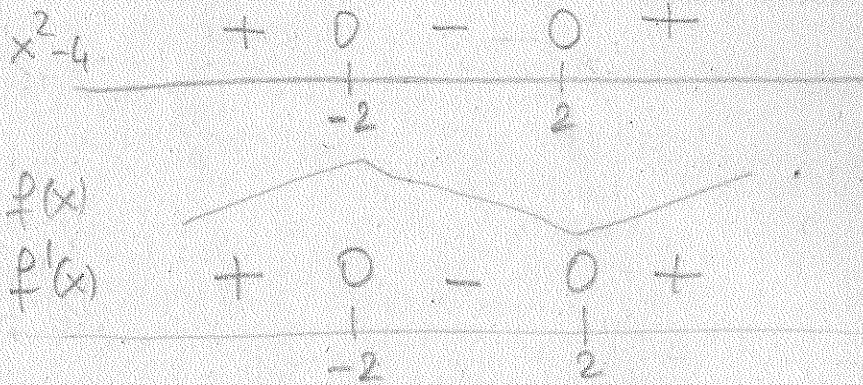
$$x^3 - 12x = k$$

Risoluzione

$$f(x) = x^3 - 12x = x(x^2 - 12)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

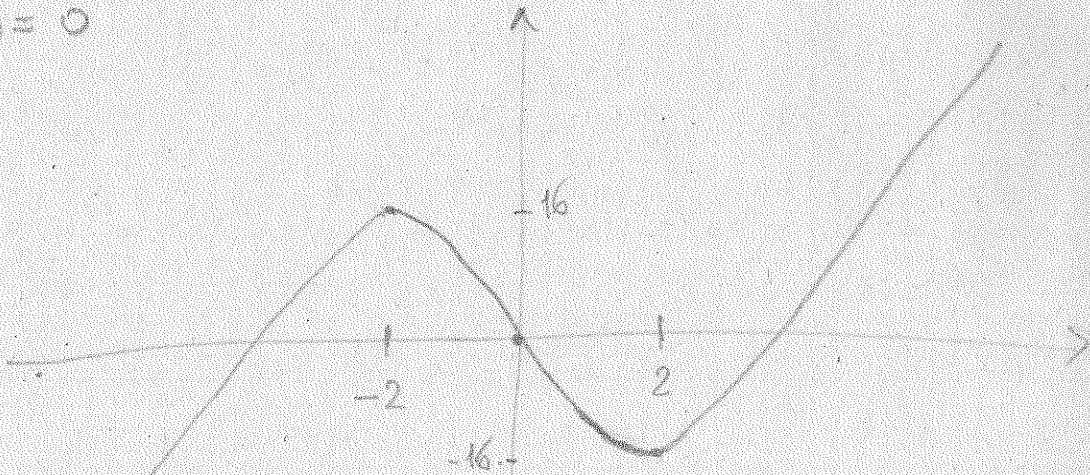
$$f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x^2 - 4) \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 \geq 0$$



$$f(-2) = (-2)^3 - 12 \cdot (-2) = -8 + 24 = 16$$

$$f(2) = 2^3 - 12 \cdot 2 = 8 - 24 = -16$$

$$f(0) = 0$$



$f(x) = k$

- $k < -16 \Rightarrow 1 \text{ sol}$
- $k = -16 \Rightarrow 2 \text{ sol}$
- $-16 < k < 16 \Rightarrow 3 \text{ sol}$
- $k = 16 \Rightarrow 2 \text{ sol}$
- $k > 16 \Rightarrow 1 \text{ sol}$



### Esercizio 3

[5 punti]

Studiare, al variare del parametro  $k \in \mathbb{R}$ , la risolubilità del sistema lineare

$$* \begin{cases} kx + y = 1 \\ x + ky = 1 \\ -ky = 1 \end{cases}$$

#### Risoluzione

$p =$  numero di equazioni  $= 3$

$q =$  numero di incognite  $= 2$

$r =$  caratteristica di  $A$ ;  $r' =$  caratteristica di  $A'$ .

$$A = \begin{bmatrix} k & 1 \\ 1 & k \\ 0 & -k \end{bmatrix}$$

$$A' = \begin{bmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 0 & -k & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det A' = k \cdot \det \begin{bmatrix} k & 1 \\ -k & 1 \end{bmatrix} - 1 \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 1 \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & -k \end{bmatrix} = k \cdot (k - 1 \cdot (-k)) - 1 \cdot (1 \cdot 1 - 0) + 1 \cdot (-k - 0) =$$

$$= k^2k - 1 - k = 2k^2 - k - 1$$

$$0 = \det A' = 2k^2 - k - 1 \rightarrow k = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)}}{2 \cdot 2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4} = \begin{cases} \frac{1+3}{4} = \frac{4}{4} = 1 \\ \frac{1-3}{4} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$k \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}; 1\} \Rightarrow \det A' \neq 0 \Rightarrow r' = 3 > 2 \geq r \Rightarrow *$  è impossibile  
 perché  $A$  è  $3 \times 2$ .

$$k=1 \Rightarrow \det A' = 0$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \det = -1 \neq 0 \Rightarrow r = 2 = r'$$

\* ha 1 soluzione

$$k = -\frac{1}{2} \Rightarrow \det A' = 0$$

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \det = \frac{1}{2} \neq 0 \Rightarrow r = 2 = r'$$

\* ha 1 soluzione

### Esercizio 4

[6 punti]

Risolvere l'equazione differenziale

$$y' = 8xy$$

Risoluzione

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = 8x$$

$$\ln|y(x)| = 4x^2 + C$$

$$|y(x)| = e^{4x^2 + C} = e^{4x^2} \cdot e^C$$

$$y(x) = \pm e^C e^{4x^2}$$

$y(x) = 0$  è soluzione

$$y(x) = k e^{4x^2}$$

$k$  costante  $\in \mathbb{R}$



### Esercizio 5

[5 punti]

Una azienda di abbigliamento impiega 50 sarti e 30 amministrativi. Il 20% dei sarti e il 10% degli amministrativi opera nel settore costumi di carnevale. Scegliendo un impiegato a caso, qual è la probabilità che sia un sarto che opera nel settore costumi di carnevale? Qual è la probabilità che sia un amministrativo che non opera nel settore costumi di carnevale?

Risoluzione

$$\begin{array}{l} 50 \text{ sarti} \longrightarrow 20\% \longrightarrow 50 \times \frac{20}{100} = 10 \\ 30 \text{ amministrativi} \longrightarrow 10\% \longrightarrow 30 \times \frac{10}{100} = 3 \end{array}$$

$$P(\text{sarto carnevale}) = \frac{10}{50+30} = \frac{10}{80} = \frac{1}{8} = 0,125 \rightarrow 12,5\%$$

$$P(\text{amministrativo non carnevale}) = \frac{30-3}{50+30} = \frac{27}{80} = 0,3375$$

↓  
33,75%

## Esercizio 6

[6 punti]

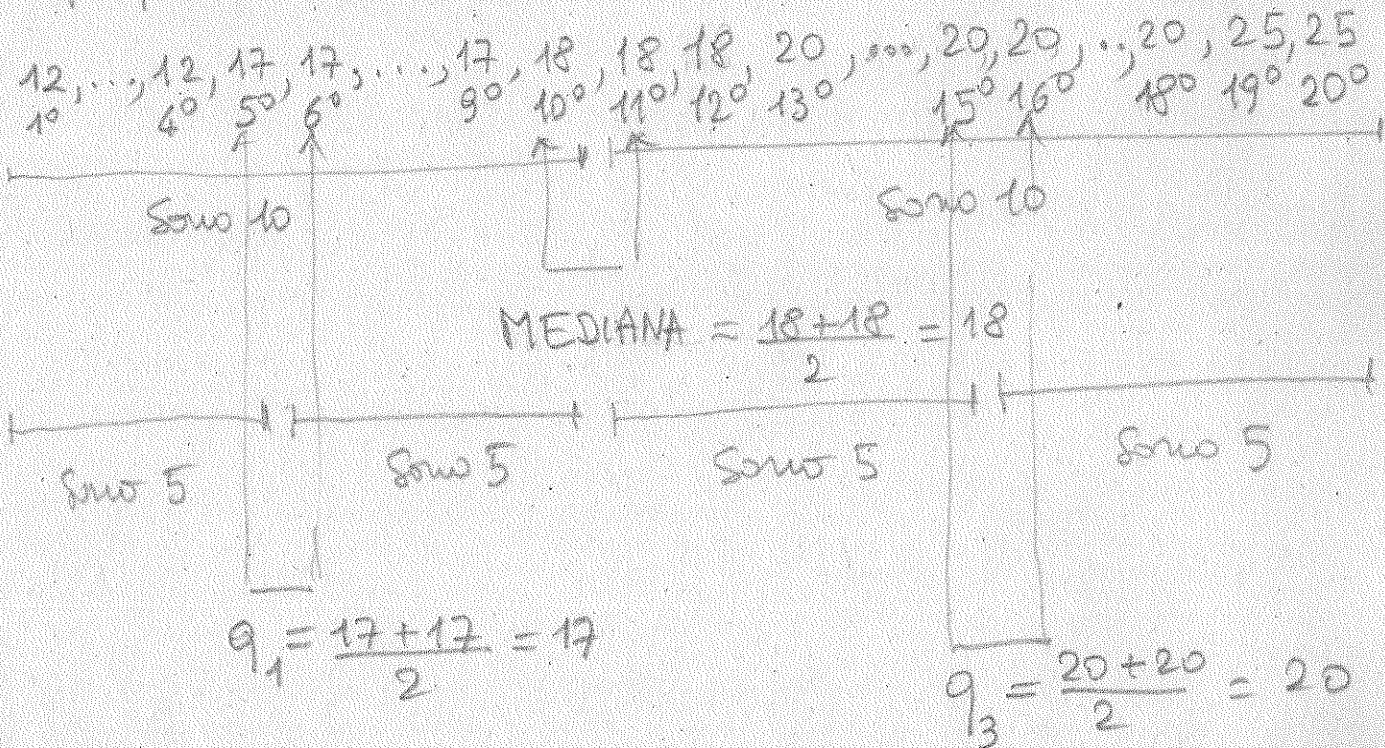
I risultati di un esperimento sono stati organizzati nella seguente tabella

valore	12	17	18	20	25
frequenza	4	5	3	6	2

Trovare moda, mediana, distanza interquartile e intervallo di variazione.

### Risoluzione

frequenza massima = 5  $\rightarrow$  valore = 20 = MODA



$$\text{Distanza interquartile} = q_3 - q_1 = 20 - 17 = 3$$

$$\begin{aligned} \text{Intervallo di variazione} &= \text{Valore massimo} - \text{Valore minimo} \\ &= 25 - 12 = 13 \end{aligned}$$