

Cognome.....

Nome.....

Matricola Corso di Laurea.....

Riservato al docente

Esercizio 1	Esercizio 2	Esercizio 3	Esercizio 4	Esercizio 5	Esercizio 6	Voto finale

Esercizio 1

[5 punti]

Calcolare il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{7x + e^{2x} - 1}{\sin x}$$

Risoluzione

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{7x + e^{2x} - 1}{\sin x} \xrightarrow{\text{De L'Hospital}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{7 + e^{2x} \cdot 2}{\cos x} = \frac{7 + 1 \cdot 2}{1} = 9$$

$\begin{matrix} \nearrow 0+1-1=0 \\ \searrow 0 \end{matrix}$
 $\begin{matrix} \nearrow 7+1 \cdot 2 \\ \searrow 1 \end{matrix}$

oppure

$$\frac{7x + e^{2x} - 1}{\sin x} = \frac{7x}{\sin x} + \frac{e^{2x} - 1}{\sin x} = \left[7 \frac{x}{\sin x} + \frac{e^{2x} - 1}{2x} \cdot 2 \frac{x}{\sin x} \right]$$

$$\downarrow$$

$$7 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \cdot 1 = 9$$

Esercizio 2

[6 punti]

Determinare, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, il numero di soluzioni dell'equazione

$$x^3 - 27x = k$$

Risoluzione

$$f(x) = x^3 - 27x = x(x^2 - 27)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$f'(x) = 3x^2 - 27 = 3(x^2 - 9) \geq 0 \quad x^2 - 9 \geq 0$$

$$x^2 - 9 \quad + \quad 0 \quad - \quad 0 \quad +$$

-3 3

$$f(x) \quad \text{graph}$$

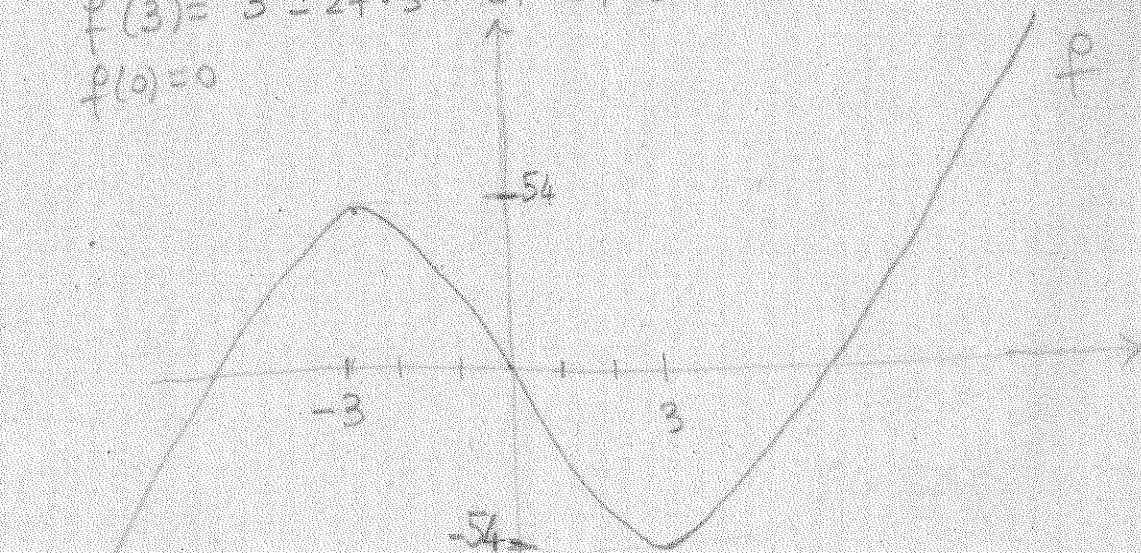
$$f'(x) \quad + \quad 0 \quad - \quad 0 \quad +$$

-3 3

$$f(-3) = (-3)^3 - 27 \cdot (-3) = -27 + 81 = 54$$

$$f(3) = 3^3 - 27 \cdot 3 = 27 - 81 = -54$$

$$f(0) = 0$$



$f(x) = k$	$\left\{ \right.$	$k < -54 \Rightarrow 1 \text{ sol}$
		$k = -54 \Rightarrow 2 \text{ sol}$
		$-54 < k < 54 \Rightarrow 3 \text{ sol}$
		$k = 54 \Rightarrow 2 \text{ sol}$
		$k > 54 \Rightarrow 1 \text{ sol}$

Esercizio 3

[5 punti]

Studiare, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, la risolubilità del sistema lineare

$$(*) \begin{cases} x + ky = 1 \\ kx + y = 1 \\ -ky = 1 \end{cases}$$

Risoluzione

$p = \text{numero di equazioni} = 3$
 $q = \text{numero di incognite} = 2$

$r = \text{caratteristica di } A = \begin{bmatrix} 1 & k \\ k & 1 \\ 0 & -k \end{bmatrix}$
 $r' = \text{caratteristica di } A' = \begin{bmatrix} 1 & k & 1 \\ k & 1 & 1 \\ 0 & -k & 1 \end{bmatrix}$

$$\det A' = 1 \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -k & 1 \end{bmatrix} - k \det \begin{bmatrix} k & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 1 \det \begin{bmatrix} k & 1 \\ 0 & -k \end{bmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (1 - (-k)) - k(k - 0) + 1 \cdot (-k^2 + 0) = 1 + k - k^2 - k^2 =$$

$$= -2k^2 + k + 1$$

$$0 = \det A' = -2k^2 + k + 1 \quad k = \frac{-1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(-2) \cdot 1}}{2 \cdot (-2)} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{-4} =$$

$$= \frac{-1 \pm 3}{-4} = \begin{cases} \frac{-1-3}{-4} = \frac{-4}{-4} = 1 \\ \frac{-1+3}{-4} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$k \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}, 1\} \Rightarrow \det A' \neq 0 \Rightarrow r' = 3 \geq 2 \geq r \Rightarrow (*) \text{ non ha soluzioni}$

$$k = -\frac{1}{2} \Rightarrow \det A' = 0, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(\det =)} 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

quindi $r' = 2 = r$ $\Rightarrow (*)$ ha 1 sola soluzione

$$k = 1 \Rightarrow \det A' = 0, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \det = -1$$

quindi $r' = 2 = r$ $\Rightarrow (*)$ ha 1 sola soluzione

Esercizio 4

[6 punti]

Risolvere l'equazione differenziale

$$y' = 6xy$$

Risoluzione

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = 6x$$

$$\ln|y(x)| = 3x^2 + C$$

$$|y(x)| = e^{3x^2 + C} = e^{3x^2} \cdot e^C$$

$$y(x) = \pm e^C \cdot e^{3x^2}$$

$y(x) = 0$ è soluzione

$$y(x) = k e^{3x^2}$$

k costante $\in \mathbb{R}$

Esercizio 5

[5 punti]

Una azienda di abbigliamento impiega 30 sarti e 20 amministrativi. Il 10% dei sarti e il 5% degli amministrativi opera nel settore costumi di carnevale. Scegliendo un impiegato a caso, qual è la probabilità che sia un sarto che opera nel settore costumi di carnevale? Qual è la probabilità che sia un amministrativo che non opera nel settore costumi di carnevale?

Risoluzione

$$\begin{array}{lcl} & \text{Settore Carnevale} & \\ 30 \text{ sarti} & \rightarrow 10\% \rightarrow & 30 \times \frac{10}{100} = 3 \\ 20 \text{ amministrativi} & \rightarrow 5\% \rightarrow & 20 \times \frac{5}{100} = 1 \end{array}$$

$$P(\text{sarto carnevale}) = \frac{3}{30+20} = \frac{3}{50} = 0,06 \rightarrow 6\%$$

$$P(\text{amministrativo non carnevale}) = \frac{20-1}{30+20} = \frac{19}{50} = 0,38 \rightarrow 38\%$$

Esercizio 6

[6 punti]

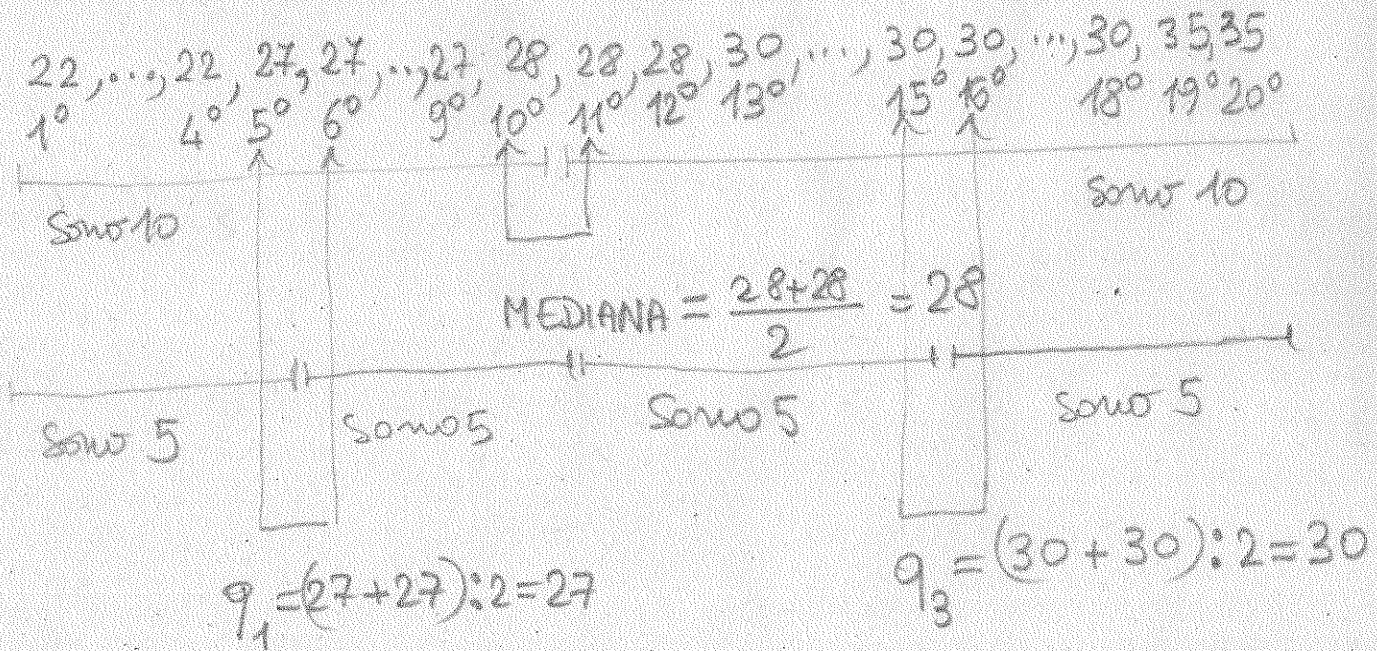
I risultati di un esperimento sono stati organizzati nella seguente tabella

valore	22	27	28	30	35
frequenza	4	5	3	6	2

Trovare moda, mediana, distanza interquartile e intervallo di variazione.

Risoluzione

frequenza massima = 6 $\rightarrow$ valore = 30 = MODA



$$\text{DISTANZA INTERQUARTILE} = q_3 - q_1 = 30 - 27 = 3$$

$$\begin{aligned}\text{INTERVALLO DI VARIAZIONE} &= \text{Valore massimo} - \text{Valore minimo} = \\ &= 35 - 22 = 13\end{aligned}$$