Matematica - A - Durata della prova: 2 ore **26 febbraio 2020**

Cognome.............................. **Nome**..................................

Matricola.............................. **Corso di Laurea**..................................

Riservato al docente

Esercizio 1	Esercizio 2	Esercizio 3	Esercizio 4	Esercizio 5	Esercizio 6	Voto finale

---

Esercizio 1 **[5 punti]**

Calcolare l'integrale

$$\int_0^2 4\,x^3\,dx = *$$

Risoluzione

$$* = \Big[x^4\Big]_{x=0}^{x=2} = 2^4 - 0^4 = 16$$

Esercizio 2

[6 punti]

Determinare, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, il numero di soluzioni dell'equazione

$$x^5 + e^x = k \quad (*)$$

Risoluzione

$f(x) = x^5 + e^x$

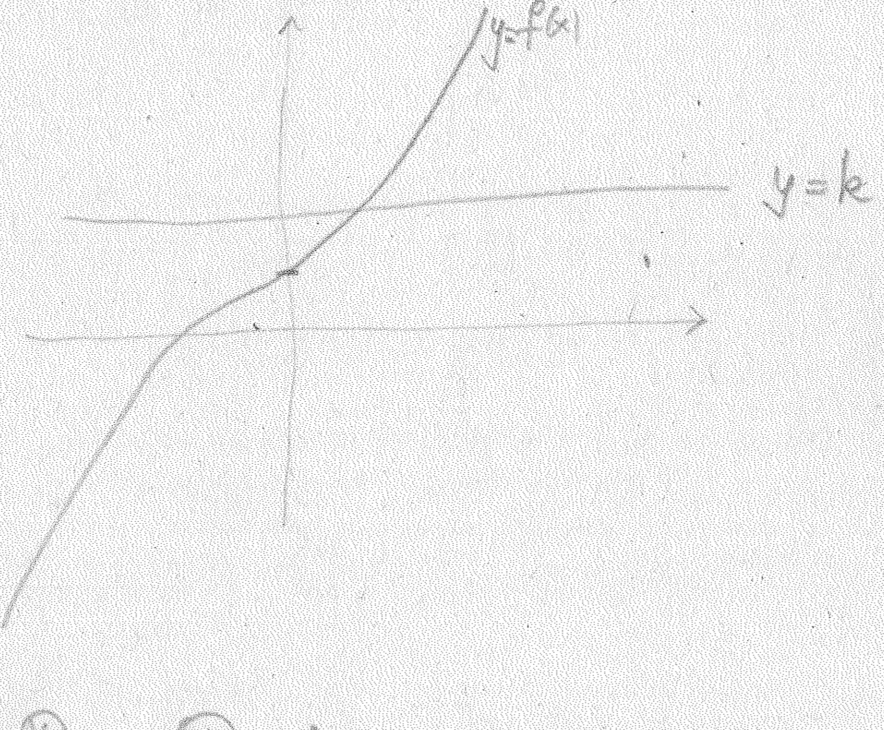
$f'(x) = 5x^4 + e^x > 0 \quad \forall x \in (-\infty, +\infty)$

$f \nearrow$ strettamente

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \underbrace{x^5}_{\downarrow\, -\infty} + \underbrace{e^x}_{\downarrow\, 0} = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \underbrace{x^5}_{\downarrow\, +\infty} + \underbrace{e^x}_{\downarrow\, +\infty} = +\infty$$

$f(0) = 0^5 + e^0 = 0 + 1 = 1$



$\forall k \in \mathbb{R}$ $(*)$ ha 1 soluzione

Esercizio 3

[5 punti]

Per quali valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ la matrice seguente ha rango 2?

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -k & 1 \\ k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \end{pmatrix}$$

Risoluzione A è 3×3

$$\det A = 0 \cdot \det\begin{pmatrix} 0 & -k & 1 \\ k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \end{pmatrix} - (-k) \det\begin{pmatrix} 0 & -k & 1 \\ k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \end{pmatrix} + 1 \det\begin{pmatrix} 0 & -k & 1 \\ k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= 0 \cdot [1-k] + k \cdot [k-1] + 1 \cdot [k^2 - 1] = k^2 - k + k^2 - 1 = 2k^2 - k - 1$$

$$0 = \det A = 2k^2 - k - 1 \qquad k = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)}}{2 \cdot 2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} =$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4} = \begin{cases} \frac{1+3}{4} = \frac{4}{4} = 1 \\ \frac{1-3}{4} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2} \end{cases}$$

$$k \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}, 1\right\} \Rightarrow \text{rango } A = 3$$

se $k = -\frac{1}{2}$ allora $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad \boxed{\begin{matrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{matrix}} \rightarrow \det = \frac{1}{4} \neq 0$

$\det A = 0 \qquad \Longrightarrow \text{rango } A = 2$

se $k = 1$ allora $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad \boxed{\begin{matrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{matrix}} \rightarrow \det = 1 \neq 0$

$\det A = 0 \qquad \Longrightarrow \text{rango } A = 2$

Quindi $\text{rango } A = 2 \iff k \in \left\{-\frac{1}{2}, 1\right\}$

Esercizio 4

[6 punti]

Risolvere il problema

$$* \begin{cases} y' &= (\cos x)\, y \\ y(\pi) &= 2 \end{cases}$$

Risoluzione

$$\oplus \quad y'(x) = (\cos x)\, y(x)$$

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = \cos x$$

$$\ln|y(x)| = \operatorname{sen} x + c$$

$$|y(x)| = e^{\operatorname{sen} x + c} = e^{\operatorname{sen} x} \cdot e^{c}$$

$$y(x) = \pm e^{c} e^{\operatorname{sen} x}$$

$y(x) = 0$ è sol di $\oplus$

tutte le sol di $\oplus$ sono $y(x) = k\, e^{\operatorname{sen} x}$

dove k è una costante $\in \mathbb{R}$

$$2 = y(\pi) = k\, e^{\overbrace{\operatorname{sen}\pi}^{0}} = k e^{0} = k$$

$$2 = k$$

la sol di $*$ è $y(x) = 2\, e^{\operatorname{sen} x}$

Esercizio 5

[5 punti]

Il comune di una citta' sui monti impiega 40 autisti e 80 operai. Il 30% degli autisti e il 20% degli operai opera nel settore spalamento neve. Scegliendo un impiegato a caso, qual è la probabilità che sia un autista che non opera nel settore spalamento neve? Qual è la probabilità che sia un operaio che opera nel settore spalamento neve?

Risoluzione

Settore neve

$$\text{Comune}\begin{cases} 40 \text{ autisti} \\ 80 \text{ operai} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \frac{30}{100} \times 40 = \frac{1200}{100} = 12 \text{ autisti} \\ \frac{20}{100} \times 80 = \frac{1600}{100} = 16 \text{ operai} \end{cases}$$

$$P(\text{autista } \underline{\text{non}} \text{ neve}) = \frac{40-12}{40+80} = \frac{28}{120} \simeq 0{,}23 \rightarrow 23\%$$

$$P(\text{operaio neve}) = \frac{16}{40+80} = \frac{16}{120} \simeq 0{,}13 \longrightarrow 13\%$$

Esercizio 6

[6 punti]

I risultati di un esperimento sono stati organizzati nella seguente tabella

valore	1	2	8	11
frequenza	4	3	1	2

Trovare media e varianza.

Risoluzione

$$\text{media} = \frac{(1\times 4)+(2\times 3)+(8\times 1)+(11\times 2)}{4+3+1+2} = \frac{4+6+8+22}{10} =$$

$$= \frac{40}{10} = 4$$

$$\text{varianza} = \frac{[(1-4)^2\times 4]+[(2-4)^2\times 3]+[(8-4)^2\times 1]+[(11-4)^2\times 2]}{4+3+1+2} =$$

$$= \frac{[(-3)^2\times 4]+[(-2)^2\times 3]+[(4)^2\times 1]+[(7)^2\times 2]}{10} =$$

$$= \frac{[9\times 4]+[4\times 3]+[16\times 1]+[49\times 2]}{10} =$$

$$= \frac{36+12+16+98}{10} = \frac{162}{10} = 16{,}2$$