Matematica - B - Durata della prova: 2 ore 26 febbraio 2020

Cognome................................ **Nome**....................................

Matricola............................. **Corso di Laurea**.......................................

Riservato al docente

Esercizio 1	Esercizio 2	Esercizio 3	Esercizio 4	Esercizio 5	Esercizio 6	Voto finale

---

Esercizio 1

[5 punti]

Calcolare l'integrale

$$\int_0^2 5\,x^4\,dx = *$$

Risoluzione

$$* = \left[x^5\right]_{x=0}^{x=2} = 2^5 - 0^5 = 32$$

Esercizio 2

[6 punti]

Determinare, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, il numero di soluzioni dell'equazione

$$x^3 + e^x = k \quad (*)$$

Risoluzione

$f(x) = x^3 + e^x$

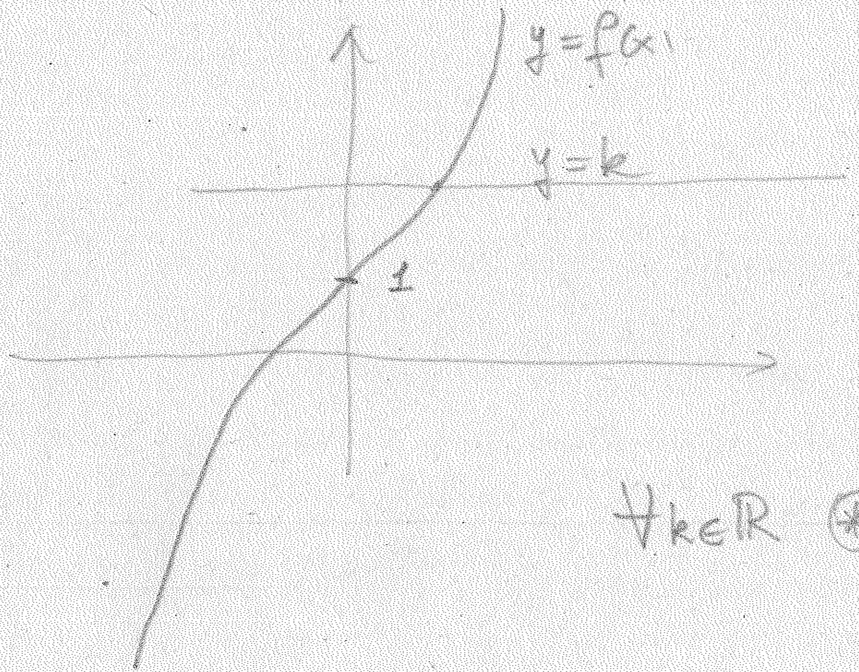
$f'(x) = 3x^2 + e^x > 0 \quad \forall x \in (-\infty, +\infty)$

$f \nearrow$ strettamente su $(-\infty, +\infty)$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \underbrace{x^3}_{-\infty} + \underbrace{e^x}_{0} = -\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \underbrace{x^3}_{+\infty} + \underbrace{e^x}_{+\infty} = +\infty$

$f(0) = 0^3 + e^0 = 0 + 1 = 1$



$\forall k \in \mathbb{R}$ $(*)$ ha 1 soluzione

Esercizio 3

[5 punti]

Per quali valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ la matrice seguente ha rango 2?

$$A = \begin{pmatrix} -k & 1 & 0 \\ 1 & 1 & k \\ k & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Risoluzione

A è 3×3

$$\det A = -k \cdot \det\begin{pmatrix} -k & 1 & 0 \\ 1 & 1 & k \\ k & 1 & 1 \end{pmatrix} - 1 \cdot \det\begin{pmatrix} -k & 1 & 0 \\ 1 & 1 & k \\ k & 1 & 1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \det\begin{pmatrix} -k & 1 & 0 \\ 1 & 1 & k \\ k & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= -k[1-k] - 1\cdot[1-k^2] + 0\cdot[1-k] =$$

$$= -k + k^2 - 1 + k^2 = 2k^2 - k - 1$$

$0 = \det A = 2k^2 - k - 1$

$$k = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4\cdot 2\cdot(-1)}}{2\cdot 2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} =$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4} = \begin{cases} \frac{1+3}{4} = \frac{4}{4} = 1 \\ \frac{1-3}{4} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$k \in \mathbb{R} \setminus \{1, -\frac{1}{2}\} \Rightarrow \det A \neq 0 \Rightarrow$ rango $A = 3$

se $k = 1$ $\quad A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \boxed{\begin{matrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{matrix}} \to \det = -1-1 = -2 \neq 0$

$\det A = 0$ $\quad \Longrightarrow$ rango $A = 2$

se $k = -\frac{1}{2}$ $\quad A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \boxed{\begin{matrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 1 \end{matrix}} \to \det = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2} \neq 0$

$\det A = 0$ $\quad \Longrightarrow$ rango $A = 2$

Quindi

rango $A = 2 \iff k \in \{1; -\frac{1}{2}\}$

Esercizio 4 **[6 punti]**

Risolvere il problema

$$* \begin{cases} y' & = & (\cos x)\, y \\ y(2\pi) & = & 4 \end{cases}$$

Risoluzione

$$\otimes \quad y' = (\cos x) y$$

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = \cos x$$

$$\ln|y(x)| = \operatorname{sen} x + c$$

$$|y(x)| = e^{\operatorname{sen} x + c} = e^{\operatorname{sen} x} \cdot e^{c}$$

$$y(x) = \pm e^{c} e^{\operatorname{sen} x}$$

$y(x) = 0$ è una soluzione di $\otimes$

tutte le soluzioni di $\otimes$ sono

$$y(x) = k\, e^{\operatorname{sen} x}$$

con k costante $\in \mathbb{R}$

$$4 = y(2\pi) = k e^{\operatorname{sen}(2\pi)} = k e^{0} = k$$

$$4 = k$$

la soluzione di $*$ è $y(x) = 4\, e^{\operatorname{sen} x}$

Esercizio 5

[5 punti]

Il comune di una citta' sui monti impiega 50 autisti e 90 operai. Il 40% degli autisti e il 30% degli operai opera nel settore spalamento neve. Scegliendo un impiegato a caso, qual è la probabilità che sia un autista che non opera nel settore spalamento neve? Qual è la probabilità che sia un operaio che opera nel settore spalamento neve?

Risoluzione

Settore neve

$$\text{Comune}\begin{cases} 50 \text{ autisti} \\ 90 \text{ operai} \end{cases} \longrightarrow \begin{array}{l} \frac{40}{100} \times 50 = \frac{2000}{100} = 20 \text{ autisti} \\ \frac{30}{100} \times 90 = \frac{2700}{100} = 27 \text{ operai} \end{array}$$

$$P(\text{autista } \underline{\text{non}} \text{ neve}) = \frac{50-20}{50+90} = \frac{30}{140} \simeq 0{,}21 \rightarrow 21\%$$

$$P(\text{operaio neve}) = \frac{27}{50+90} = \frac{27}{140} \simeq 0{,}19 \rightarrow 19\%$$

Esercizio 6

[6 punti]

I risultati di un esperimento sono stati organizzati nella seguente tabella

valore	2	3	9	12
frequenza	4	3	1	2

Trovare media e varianza.

Risoluzione

$$\text{media} = \frac{(2\times4)+(3\times3)+(9\times1)+(12\times2)}{4+3+1+2} = \frac{8+9+9+24}{10} =$$

$$= \frac{50}{10} = 5$$

$$\text{Varianza} = \frac{[(2-5)^2\times4]+[(3-5)^2\times3]+[(9-5)^2\times1]+[(12-5)^2\times2]}{4+3+1+2} =$$

$$= \frac{[(-3)^2\times4]+[(-2)^2\times3]+[(4)^2\times1]+[(7)^2\times2]}{10} =$$

$$= \frac{[9\times4]+[4\times3]+[16\times1]+[49\times2]}{10} =$$

$$= \frac{36+12+16+98}{10} = \frac{162}{10} = 16{,}2$$