Costruzione di insiemi di Cantor con passo di riduzione generico

Marta Inglima

A.A. 2002/2003

1 Costruzione di C_k

Consideriamo $L > 0$ e definiamo

$$E_0^{(k)} = \bigcup_{i=1}^{4^0=1} Q_i^{0(k)}$$

$$E_1^{(k)} = \bigcup_{i=1}^{4^1=4} Q_i^{1(k)}$$

$$\vdots$$

$$E_j^{(k)} = \bigcup_{i=1}^{4^j} Q_i^{j(k)}$$

dove $Q_i^{j(k)}$ è un quadrato chiuso di lato $k^j L$ con $k \in \mathbb{R}^+$, costruito a partire dai vertici dei quadrati $Q_r^{j-1(k)}$ del passo precedente, come si vede nella figura 1:

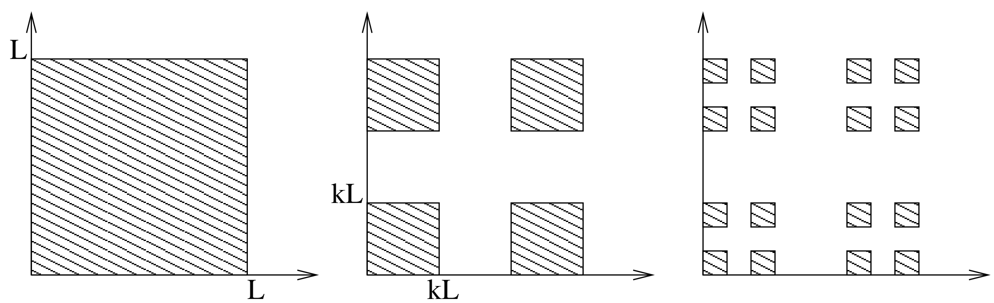

Figura 1: E_0^k, E_1^k, E_2^k

Poiché vogliamo che al variare di i questi siano a due a due disgiunti richiediamo che sia:

$$2kL < L \Rightarrow k < \frac{1}{2}$$

Definiamo allora:

$$C_k = \bigcap_{n=0}^{\infty} E_n^{(k)}$$

Osservazione 1. *Siano:*

$$\begin{aligned} V^{0(k)} &= \{\textit{vertici di } Qi^{0(k)}, i = 1\} \\ V^{1(k)} &= \{\textit{vertici di } Qi^{1(k)}, i = 1, \dots, 4\} \\ &\vdots \\ V^{j(k)} &= \{\textit{vertici di } Qi^{j(k)}, i = 1, \dots, 4^j\} \end{aligned}$$

allora abbiamo che:

$$\begin{aligned} \mid V^{0(k)} \mid &= 4 \\ \mid V^{1(k)} \mid &= 4 \cdot 4 \\ &\vdots \\ \mid V^{j(k)} \mid &= 4 \cdot 4^j \end{aligned}$$

Osservazione 2. *Risulta:*

$$\forall j \quad V^{j(k)} \subseteq E_s^{(k)} \quad \forall s \in \{0, 1, \dots, j\}$$

perché per costruzione

$$V^{j(k)} \subseteq E_j^{(k)} \subseteq E_{j-1}^{(k)} \subseteq \ldots \subseteq E_0^{(k)}$$

D'altra parte poiché ad ogni passo consideriamo quadrati chiusi, risulta:

$$\forall j \quad V^{j(k)} \subseteq E_r^{(k)} \quad \forall r > j$$

In conclusione:

$$\forall j \quad V^{j(k)} \subseteq E_n^{(k)} \quad \forall n \geq 0$$

quindi

$$V^{j(k)} \subseteq \bigcap_{n=0}^{\infty} E_n^{(k)} = C_k$$

Osservazione 3. *Come abbiamo notato dalla figura 1, ad ogni passo si creano nuovi "buchi" tra i quadrati. Ci interessa calcolare il diametro minimo di tali "buchi".*

1. *Al passo* 0 *come vediamo dalla figura 2 non vi è alcun "buco":*

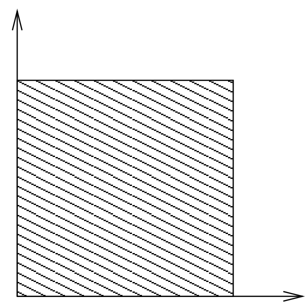

Figura 2: Al passo zero non ci sono "buchi"

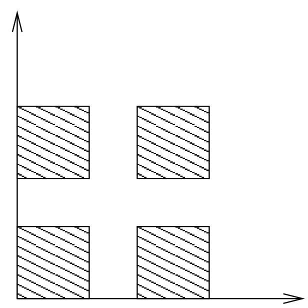

Figura 3: "Buchi" al primo passo

2. Al passo 1 *il diametro minimo è pari a*

$$L - kL - kL = L(1 - 2k)$$

3. Al passo 2 *come vediamo dalla figura 4 al "buco" del passo precedente di diametro minimo* $(1-2k)L$ *se ne è aggiunto un secondo il cui diametro minimo è*

$$kL - k^2L - k^2L = k(1 - 2k)L$$

4. Al terzo passo avremo "buchi" di diametri minimi:

$$(1 - 2k)L$$
$$k(1 - 2k)L$$
$$k^2(1 - 2k)L$$

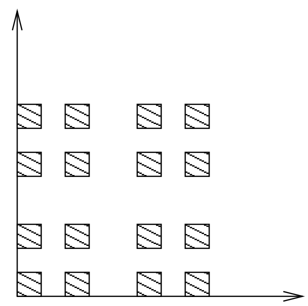

Figura 4: "Buchi" al secondo passo

Quindi mano mano che andiamo avanti con le iterazioni, si crea una successione decrescente di "buchi", ed in generale al passo j il "buco" più piccolo è quello di diametro minimo $k^{j-1}(1-2k)L$.

Vogliamo stimare, come abbiamo fatto nel caso particolare di $k = \frac{1}{3}$, la distanza tra due qualsiasi vertici di $V^{j(k)}$. Si pone ora il problema di distinguere il caso in cui la distanza tra due vertici di uno stesso quadrato è sicuramente minore della distanza tra vertici di quadrati distinti (figura 5) e viceversa (figura 6):

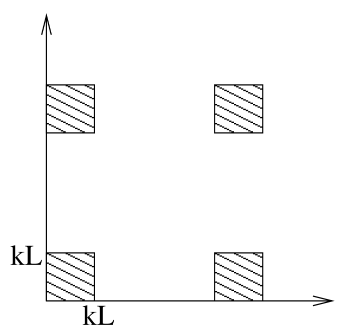

Figura 5: Passo di riduzione $k \leq \frac{1}{3}$

Osservazione 4. *Mostriamo le seguenti cose:*

1. *Se $k \leq \frac{1}{3}$ allora*

$$\forall a, b \in V^{j(k)} \, con \; a \neq b \quad \Rightarrow \quad \parallel a - b \parallel \geq k^j L$$

2. *Se $k > \frac{1}{3}$allora:*

$$\forall a, b \in V^{j(k)} \, con \; a \neq b \quad \Rightarrow \quad \parallel a - b \parallel \geq k^{j-1}(1-2k)L$$

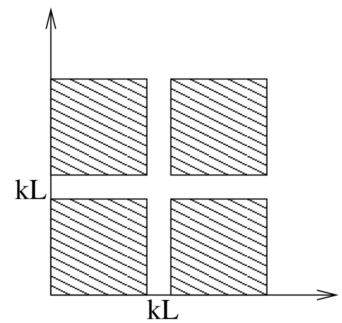

Figura 6: Passo di riduzione $k > \frac{1}{3}$

Dimostrazione. 1. Al passo zero comunque presi a, $b \in V^{0(k)}$ si ha:

$$\| a - b \| = L$$

oppure

$$\| a - b \| = L\sqrt{2}$$

In entrambi le situazioni

$$\| a - b \| \geq L = k^0 L$$

Ad un generico passo $j \geq 1$ comunqe presi a, $b \in V^{j(k)}$ si hanno due casi:

- Se a e b appartengono allo stesso quadrato allora:

$$\| a - b \| = k^j L$$

oppure

$$\| a - b \| = \sqrt{2} k^j L > k^j L$$

- Se a e b non appartengono allo stesso quadrato allora per l'osservazione fatta sui buchi:

$$\| a - b \| \geq k^{j-1}(1 - 2k)L$$

Ma osserviamo che:

$$k^j L \leq k^{j-1}(1 - 2k)L \Leftrightarrow k \leq 1 - 2k \Leftrightarrow k \leq \frac{1}{3}$$

Per tanto in tutti i casi risulta:

$$\| a - b \| \geq k^j L$$

2. Al passo zero comunque presi a, $b \in V^{0(k)}$ si ha:

$$\| a - b \| = L$$

oppure

$$\| a - b \| = L\sqrt{2}$$

In entrambi i casi

$$\| a - b \| \geq L = k^0 L \geq k^0(1-2k)L$$

Ad un generico passo $j \geq 1$ comunqe presi a, $b \in V^{j(k)}$ si hanno due casi:

   - Se a e b appartengono allo stesso quadrato allora:

   $$\| a - b \| = k^j L$$

   oppure

   $$\| a - b \| = \sqrt{2} k^j L > k^j L$$

   - Se a e b non appartengono allo stesso quadrato, come prima:

   $$\| a - b \| \geq k^{j-1}(1-2k)L$$

   Ma osserviamo che

   $$k^{j-1}(1-2k)L < k^j L \Leftrightarrow 1 - 2k < k \Leftrightarrow k > \frac{1}{3}$$

   e per tanto in tutti i casi risulta:

   $$\| a - b \| \geq k^{j-1}(1-2k)L$$

$\square$

2 Dimensione Box Counting di C_k

2.1 Caso $k \leq \frac{1}{3}$

Per definizione

$$\dim_B C_k = \lim_{\delta \to 0^+} \frac{\log N_\delta(C_k)}{\log \frac{1}{\delta}}$$

Dobbiamo quindi determinare $N_\delta(C_k)$. Non è restrittivo supporre $\delta \in (0, kL]$. Osserviamo che

$$(0, kL] = \bigcup_{i=1}^{\infty} (k^{i+1}L, k^i L]$$

con

$$(k^{i+1}L, k^iL] \cap (k^{j+1}L, k^jL] = \emptyset \quad \forall i \neq j$$

Questo vuol dire che se $\delta \in (0, kL] \Rightarrow \exists! j \geq 1 \quad$ tale che $\delta \in (k^{j+1}L, k^jL]$ e per tale j vale la relazione:

$$k^{j+1}L < \delta \leq k^jL$$

$$\Rightarrow \quad k^{j+1} < \frac{\delta}{L} \leq k^j$$

$$\Rightarrow \quad k^{-(j+1)} > \frac{L}{\delta} \geq k^{-j}$$

$$\Rightarrow \quad \log k^{-(j+1)} > \log(\frac{L}{\delta}) \geq \log k^{-j}$$

$$\Rightarrow \quad -(j+1)\log k > \log(\frac{L}{\delta}) \geq -j \log k$$

$$\Rightarrow \quad (j+1) > \frac{\log(\frac{L}{\delta})}{-\log k} \geq j$$

Osserviamo che essendo $k < 1/2$ si ha $\log k < 0$ e quindi $-\log k > 0$.

Sia $\mathcal{F}$ la famiglia dei δ-quadrati che intersecano C_k. Vogliamo cercare di stimare $N_\delta(C_k)$.

Stima dal basso di $N_\delta(C_k)$ Mostriamo innanzi tutto che se $P \in \mathcal{F}$ allora P può contenere al più un vertice di $V^{j-1(k)}$: per assurdo supponiamo che $a, v \in P$, con $a \neq v$ e $a, v \in V^{j-1(k)}$. P è un quadrato di lato δ quindi si avrebbe $\| a - v \| \leq \sqrt{2}\delta < k^{-1}\delta \leq k^{-1}k^jL = k^{j-1}L$. (Ricordiamo che $k < 1/2 \Rightarrow k^{-1} > 2 > \sqrt{2}$). Questo è un assurdo perché avevamo visto che se $a, v \in V^{j-1(k)}$ e $a \neq v$ allora $\| a - v \| \geq k^{j-1}L$. Dunque in ogni δ-quadrato P vi é al più un vertice, ogni vertice deve appartenere ad almeno un δ-quadrato per tanto $| V^{j-1(k)} | \leq | \mathcal{F} |$ e vale quindi la relazione:

$$N_\delta(C_k) = | \mathcal{F} | \geq | V^{j-1(k)} | = 4^j$$

Stima dall'alto di $N_\delta(C_k)$ Per costruzione sappiamo che $C_k \subseteq E_n^{(k)} \forall n$ in particolare $C_k \subset E_j^{(k)}$ per quel tale j che soddisfa $k^{j+1}L < \delta \leq k^jL$. Sempre per costruzione abbiamo che $C_k \subseteq E_j^{(k)} = \bigcup_{i=1}^{4^j} Q_i^{j(k)}$ e quindi vale la relazione:

$$N_\delta(C_k) \leq N_\delta(E_j^{(k)}) \leq \sum_{i=1}^{4^j} N_\delta(Q_i^{j(k)})$$

Ci siamo quindi ricondotti a calcolare $N_\delta(Q_i^{j(k)})$.

$$Q_i^{j(k)} = [x_0, x_0 + k^j L] \times [y_0, y_0 + k^j L]$$

per qualche $x_0, y_0 \in [0, L]$. Sia $l^{j(k)}$ il lato del quadrato $Q_i^{j(k)}$. Si ha:

$$l^{j(k)} = x_0 + k^j L - x_0 = k^j L < k^{-1}\delta$$

$$\Rightarrow \frac{l^{j(k)}}{\delta} < k^{-1} < [k^{-1}] + 1 \tag{1}$$

Siano:

$$\begin{aligned} I_j &= [x_0, x_0 + k^j L] \\ H_j &= [y_0, y_0 + k^j L] \end{aligned}$$

Vale il seguente risultato:

$$N_\delta(Q_i^{j(k)}) = N_\delta(I_j) \cdot N_\delta(H_j) \tag{2}$$

Calcoliamo $N_\delta(I_j)$. Abbiamo due possibilità:

Caso 1: $x_0 = m\delta$.

In tal caso dalla 1, e osservando la figura 7, segue che:

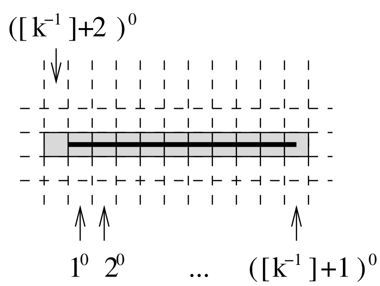

Figura 7: Caso 1

$$N_\delta(I_j) \leq [k^{-1}] + 2$$

Caso 2: $m\delta < x_0 < (m+1)\delta$.

In questo caso (come possiamo osservare dalla figura 8) se andiamo a contare i δ-quadrati che hanno intersezione non vuota con il lato I_j abbiamo un primo quadrato che è esattamente $[m\delta, (m+1)\delta]$ e, per la

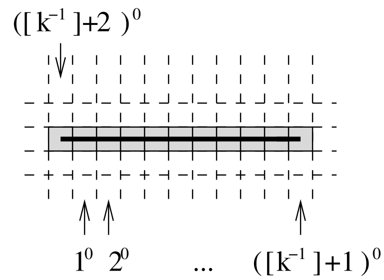

Figura 8: Caso 2

1, i rimanenti sono in numero sicuramente minore o uguale a $[k^{-1}]+1$. Per tanto vale di nuovo:

$$N_\delta(I_j) \leq [k^{-1}]+2$$

Naturalmente per $N_\delta(H_j)$ la situazione è del tutto simile e quindi per la 2 in tutti i casi si ha:

$$N_\delta(Q_i^{j(k)}) \leq ([k^{-1}]+2)^2$$

Abbiamo quindi trovato che:

$$N_\delta(C_k) \leq \sum_{i=0}^{4^j} N_\delta(Q_i^{j(k)}) \leq 4^j([k^{-1}]+2)^2$$

Riprendendo la stima dal basso:

$$4^j \leq N_\delta(C_k) \leq 4^j \cdot ([k^{-1}]+2)^2$$

Ricordiamo, ora, che avevamo trovato che:

$$j \leq \frac{\log(\frac{L}{\delta})}{-\log k} < j+1$$

Quindi

$$4^j \leq 4^{\frac{\log(\frac{L}{\delta})}{-\log k}} = e^{\log 4 \cdot \frac{\log(\frac{L}{\delta})}{-\log k}} = (\frac{L}{\delta})^{\frac{\log 4}{-\log k}} = (\frac{L}{\delta})^d$$

dove

$$d = \frac{\log 4}{-\log k}$$

quindi

$$4^j \leq (\frac{L}{\delta})^d$$

e

$$4^{j+1} > (\frac{L}{\delta})^d$$

$$\Rightarrow 4^j > \frac{1}{4}(\frac{L}{\delta})^d$$

dunque:

$$\frac{1}{4}(\frac{L}{\delta})^d < 4^j \leq (\frac{L}{\delta})^d$$

In sostanza $\forall \delta \in (0, kL]$ si ha:

$$\frac{1}{4}(\frac{L}{\delta})^d \leq 4^j \leq N_\delta(C_k) \leq 4^j([k^{-1}]+2)^2 \leq (\frac{L}{\delta})^d([k^{-1}]+2)^2$$

Chiamando $a = ([k^{-1}]+2)^2$ si ha in conclusione:

$$\log(1/4(\frac{L}{\delta})^d) \leq \log N_\delta(C_k) \leq \log[(\frac{L}{\delta})^d a^2]$$

Se $\delta \in (0, kL \wedge 1)$ possiamo dividere per $\log(\frac{1}{\delta})$ e si ha:

$$\frac{\log(L^d/4) + d\log(\frac{1}{\delta})}{\log(\frac{1}{\delta})} \leq \frac{\log N_\delta(C_k)}{\log(\frac{1}{\delta})} \leq \frac{\log a^2 L^d + d\log(\frac{1}{\delta})}{\log(\frac{1}{\delta})}$$

Passando al limite per $\delta \to 0^+$ troviamo che:

$$\dim_B(C_k) = d = \frac{\log 4}{-\log k}$$

2.2 Caso $k > \frac{1}{3}$

Dobbiamo di nuovo calcolare $N_\delta(C_k)$. Supponiamo $\delta \in (0, k(1-2k)L]$.
Osserviamo che in questo caso

$$(0, k(1-2k)L] = \bigcup_{i=1}^{\infty}(k^{i+1}(1-2k)L, k^i(1-2k)L]$$

con

$$(k^{i+1}(1-2k)L, k^i(1-2k)L] \cap (k^{j+1}(1-2k)L, k^j(1-2k)L] = \emptyset \quad \forall i \neq j$$

Questo vuol dire che se $\delta \in (0, k(1-2k)L] \Rightarrow \exists! \quad j \geq 1$ tale che

$$\delta \in (k^{j+1}(1-2k)L, k^j(1-2k)L]$$

e per tale j vale la relazione:

$$k^{j+1}(1-2k)L < \delta \leq k^j(1-2k)L$$

$$\Rightarrow \quad k^{j+1} < \frac{\delta}{L(1-2k)} \leq k^j$$

$$\Rightarrow \quad k^{-(j+1)} > \frac{L(1-2k)}{\delta} \geq k^{-j}$$

$$\Rightarrow \quad \log k^{-(j+1)} > \log(\frac{L(1-2k)}{\delta}) \geq \log k^{-j}$$

$$\Rightarrow \quad -(j+1)\log k > \log(\frac{L(1-2k)}{\delta}) \geq -j\log k$$

$$\Rightarrow \quad (j+1) > \frac{\log(\frac{L(1-2k)}{\delta})}{-\log k} \geq j$$

Osserviamo che essendo $k < 1/2$ si ha $\log k < 0$ e quindi $-\log k > 0$.

Ripercorrendo lo stesso ragionamento fatto nel caso precedente:

Stima dal basso di $N_\delta(C_k)$ Mostriamo innanzi tutto che se $P \in \mathcal{F}$ allora P può contenere al più un vertice di $V^{j-1(k)}$: per assurdo supponiamo che $a, v \in P$, con $a \neq v$ e $a, v \in V^{j-1(k)}$. P è un quadrato di lato δ quindi si avrebbe $\| a - v \| \leq \sqrt{2}\delta < k^{-1}\delta \leq k^{-1}k^j(1-2k)L = k^{j-1}(1-2k)L$. (Ricordiamo che $k < 1/2 \Rightarrow k^{-1} > 2 > \sqrt{2}$). Questo è un assurdo perché avevamo visto che se $a, v \in V^{j-1(k)}$ e $a \neq v$ allora $\| a - v \| \geq k^{j-1}(1-2k)L$. Dunque in ogni δ-quadrato P ci può essere al più un vertice, ogni vertice deve appartenere ad almeno un δ-quadrato, e per tanto vale di nuovo la relazione:

$$N_\delta(C_k) = | \mathcal{F} | \geq | V^{j-1(k)} | = 4^j$$

Stima dall'alto di $N_\delta(C_k)$ Come nel caso precedente, continua a valere la relazione:

$$N_\delta(C_k) \leq \sum_{i=0}^{4^j} N_\delta(Q_i^{j(k)})$$

dove:

$$Q_i^{j(k)} = [x_0, x_0 + k^jL] \times [y_0, y_0 + k^jL]$$

per qualche $x_0, y_0 \in [0, L]$. Sia $l^{j(k)}$ il lato del quadrato $Q_i^{j(k)}$. In questo caso si ha:

$$l^{j(k)} = x_0 + k^j L - x_0 = k^j L < k^{-1}(1-2k)^{-1}\delta$$

$$\Rightarrow \frac{l^{j(k)}}{\delta} < k^{-1}(1-2k)^{-1} < [k^{-1}(1-2k)^{-1}] + 1 \tag{3}$$

Per lo stesso ragionamento del caso precedente, vale:

$$N_\delta(Q_i^{j(k)}) \leq ([k^{-1}(1-2k)^{-1}] + 2)^2$$

E quindi:

$$N_\delta(C_k) \leq \sum_{i=0}^{4^j} N_\delta(Q_i^{j(k)}) \leq 4^j([k^{-1}(1-2k)^{-1}] + 2)^2$$

Considerando contemporaneamente la stima dall'alto e la stima dal basso, si ha:

$$4^j \leq N_\delta(C_k) \leq 4^j \cdot ([k^{-1}(1-2k)^{-1}] + 2)^2$$

Ricordiamo, ora, che avevamo trovato che:

$$j \leq \frac{\log(\frac{L(1-2k)}{\delta})}{-\log k} < j + 1$$

quindi

$$4^j \leq 4^{\frac{\log(\frac{L(1-2k)}{\delta})}{-\log k}} = e^{\log 4 \cdot \frac{\log(\frac{L(1-2k)}{\delta})}{-\log k}} = (\frac{L(1-2k)}{\delta})^{\frac{\log 4}{-\log k}} = (\frac{L(1-2k)}{\delta})^d$$

dove

$$d = \frac{\log 4}{-\log k}$$

quindi

$$4^j \leq (\frac{L(1-2k)}{\delta})^d$$

e

$$4^{j+1} > (\frac{L(1-2k)}{\delta})^d$$

$$\Rightarrow 4^j > \frac{1}{4}(\frac{L(1-2k)}{\delta})^d$$

dunque:

$$\frac{1}{4}(\frac{L(1-2k)}{\delta})^d < 4^j \leq (\frac{L(1-2k)}{\delta})^d$$

In sostanza $\forall\delta \in (0, k(1-2k)L]$ si ha:

$$\frac{1}{4}(\frac{L(1-2k)}{\delta})^d < 4^j \leq N_\delta(C_k) \leq 4^j([k^{-1}(1-2k)^{-1}]+2)^2 \leq (\frac{L(1-2k)}{\delta})^d([k^{-1}(1-2k)^{-1}]+2)^2$$

Chiamando $b = ([k^{-1}(1-2k)^{-1}]+2)^2$ si ha in conclusione:

$$\log(\frac{1}{4}(\frac{L(1-2k)}{\delta})^d) \leq \log N_\delta(C_k) \leq \log[(\frac{L(1-2k)}{\delta})^d b^2]$$

Se $\delta \in (0, k(1-2k)L \wedge 1)$ possiamo dividere per $\log(\frac{1}{\delta})$ e si ha:

$$\frac{\log([L(1-2k)]^d/4) + d\log(\frac{1}{\delta})}{\log(\frac{1}{\delta})} \leq \frac{\log N_\delta(C_k)}{\log(\frac{1}{\delta})} \leq \frac{\log b^2[L(1-2k)]^d + d\log(\frac{1}{\delta})}{\log(\frac{1}{\delta})}$$

Passando al limite per $\delta \to 0^+$ troviamo di nuovo che:

$$\dim_B(C_k) = d = \frac{\log 4}{-\log k}$$

3 Conclusioni

Abbiamo mostrato che $\forall k \in (0, \frac{1}{2})$ risulta:

$$\dim_B(C_k) = d = \frac{\log 4}{-\log k}$$

Studiamo ora la funzione

$$f : A = (0, \frac{1}{2}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

definita da:

$$f(k) = \frac{\log 4}{-\log k}$$

Valgono i seuenti risultati:

- $f(k) \in C^0(A)$
- $f(k) > 0 \quad \forall k \in A$
- $$\lim_{k\to 0} f(k) = 0$$

- $$\lim_{k\to\frac{1}{2}} f(k) = 2$$

- $f'(k) = \frac{\log 4}{k \log^2 k} > o \quad \forall k \in A$

Ne segue che:

$$\begin{aligned} inf_A f(k) &= 0 \\ sup_A f(k) &= 2 \end{aligned}$$

e per tanto $f(k)$ assume tutti i valori compresi tra inf e sup. Questo vuol dire che é possibile costruire insiemi di dimensione compresa tra 0 e 2.