

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI L'AQUILA

Teoria delle Funzioni e Metodi Variazionali
Prof. Francesco Leonetti

Dispense

INSIEME DI CANTOR IN $\mathbb{R}^2$

Redatte da:

Fabio Aiello
Romina Eramo

a.a. 2006/2007

Indice

1	L'insieme di Cantor in $\mathbb{R}^2$	1
1.1	Costruzione	1
1.2	Misura di Hausdorff dell'insieme di Cantor F	3
1.2.1	F ha infiniti punti: $\mathcal{H}^0(F) = \infty$	3
1.2.2	Per quali valori di s , $\mathcal{H}^s(F) < \infty$	4
1.2.3	Nota 1	5
1.2.4	Nota 2	6
1.2.5	Nota 3	7
1.2.6	Nota 4	8
1.2.7	Nota 5	8
1.2.8	Nota 6	9
1.2.9	Nota 7	10
1.2.10	Nota 8	10
1.2.11	Nota 9	10
1.2.12	Nota 10	12
1.2.13	Andamento di $\frac{\ln 4}{(-\ln k)}$	13
1.2.14	Per quali valori di s , $\mathcal{H}^s(F) > 0$	13
1.2.15	Conclusione	18

Capitolo 1

L'insieme di Cantor in $\mathbb{R}^2$

1.1 Costruzione

L'insieme di Cantor è definito in modo ricorsivo, partendo da un quadrato chiuso avente lato di lunghezza $L \in (0, \infty)$. Si fissa un parametro $k \in (0, \frac{1}{2})$ e si procede nel seguente modo:

- **Passo 0:**

$$E_0 = \bigcup_{j=1}^{4^0} Q_{0,j}$$

dove $Q_{0,j}$ è il quadrato di partenza avente lato di lunghezza $L = k^0 L$.

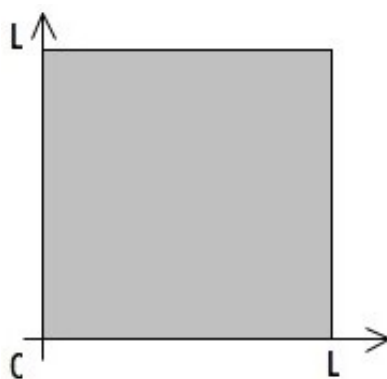


Figura 1.1: Passo 0

- **Passo 1:**

$$E_1 = \bigcup_{j=1}^{4^1} Q_{1,j}$$

dove $Q_{1,j}$ per $j = 1, 2, 3, 4$ sono quattro quadrati ognuno con lato di lunghezza $k^1 L$ posizionati ai vertici del quadrato di base.

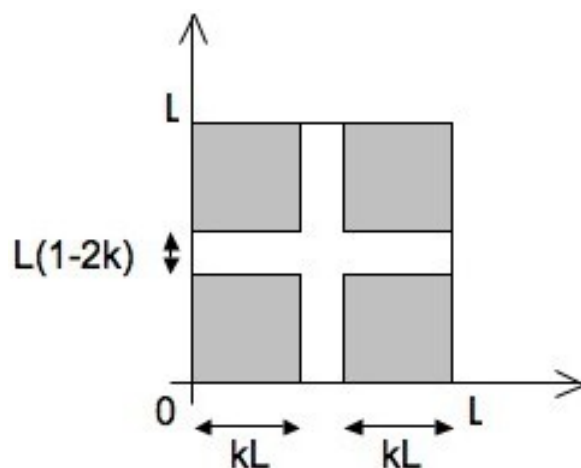


Figura 1.2: Passo 1

- **Passo 2:**

$$E_2 = \bigcup_{j=1}^{4^2} Q_{2,j}$$

dove $Q_{2,j}$ per $j = 1, \dots, 16$ sono sedici quadrati ognuno con lato di lunghezza $k^2 L$ posizionati ai vertici dei quattro quadrati del passo precedente.

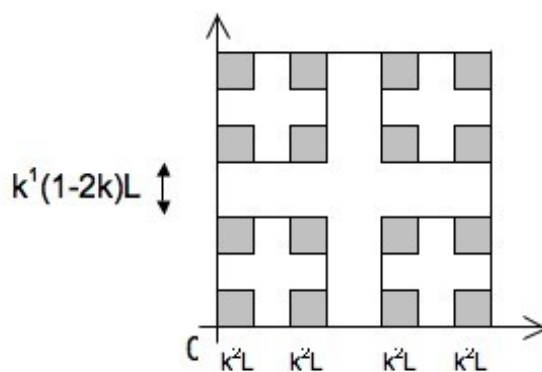


Figura 1.3: Passo 2

• **Passo i-esimo:**

$$E_i = \bigcup_{j=1}^{4^i} Q_{i,j}$$

dove $Q_{i,j}$ per $j = 1, \dots, 4^i$ sono 4^i quadrati ognuno con lato di lunghezza $k^i L$ posizionati ai vertici dei 4^{i-1} quadrati del passo precedente.

A questo punto possiamo definire l'insieme di Cantor in $\mathbb{R}^2$ come:

$$F = \bigcap_{j=0}^{\infty} E_j.$$

Ossevazione 1: F è un insieme chiuso poiché ottenuto mediante intersezioni di insiemi chiusi.

Osservazione 2: F è compatto poiché è un insieme chiuso in $\mathbb{R}^2$.

1.2 Misura di Hausdorff dell'insieme di Cantor F

1.2.1 F ha infiniti punti: $\mathcal{H}^0(F) = \infty$

Per ogni $r = 0, 1, \dots$, indichiamo con W_r l'insieme dei vertici dei quadrati di E_r dove

$$E_r = \bigcup_{i=1}^{4^r} Q_{r,i}.$$

Tali vertici sono contenuti in $E_j \forall j \geq r$ e in $E_j \forall j < r$, quindi sono contenuti in F . Dunque, indicando con W_r l'insieme dei vertici dei quadrati di E_r , risulta

$$W_r \subset F.$$

Per monotonia della misura rispetto all'inclusione

$$\mathcal{H}^0(W_r) \leq \mathcal{H}^0(F).$$

poiché W_r è un numero finito di punti, $\mathcal{H}^0(W_r)$ misura il numero di punti di esso, precisamente

$$\mathcal{H}^0(W_r) = 4^{r+1}.$$

Quindi $\forall r \in \mathbb{N} \ 4^{r+1} \leq \mathcal{H}^0(F)$. Dunque $\mathcal{H}^0(F) = \infty$ e quindi l'insieme di Cantor ha infiniti punti.

1.2.2 Per quali valori di s , $\mathcal{H}^s(F) < \infty$

Per ogni $\delta > 0$ ricordiamo che

$$\mathcal{H}_\delta^s(F) = \inf \left\{ \sum_r \alpha(s) \left(\frac{\text{diam } A_r}{2} \right)^s : F \subset \bigcup_r A_r, \text{diam } A_r \leq \delta \right\}.$$

Nel nostro caso dobbiamo ricoprire F con un ricoprimento opportuno. Vogliamo che

$$\delta \geq k^j L \sqrt{2}$$

dove $k^j L \sqrt{2}$ rappresenta la lunghezza della diagonale di un qualunque $Q_{j,i}$ (ovvero $\text{diam } Q_{j,i}$). Dunque:

$$\begin{aligned} \delta \geq k^j L \sqrt{2} &\Leftrightarrow k^j \leq \frac{\delta}{\sqrt{2}L} \Leftrightarrow \ln(k^j) \leq \ln\left(\frac{\delta}{L\sqrt{2}}\right) \\ &\Leftrightarrow j \ln(k) \leq \frac{\delta}{\sqrt{2}L} \Leftrightarrow j(-\ln(k)) \geq -\ln\left(\frac{\delta}{L\sqrt{2}}\right) \\ &\Leftrightarrow k^j \geq \frac{\ln\left(\frac{\delta}{L\sqrt{2}}\right)}{\ln(k)} \quad (0 < k < \frac{1}{2} \Rightarrow \ln(k) < 0). \end{aligned}$$

Per definizione dell'insieme di Cantor:

$$F \subset E_j = \bigcup_{i=1}^{4^j} Q_{j,i} \quad \text{con } \text{diam } Q_{j,i} \leq \delta$$

quindi $\bigcup_{i=1}^{4^j} Q_{j,i}$ costituisce un ricoprimento per l'insieme di Cantor con $\text{diam } Q_{j,i} \leq \delta$. Dunque

$$\mathcal{H}_\delta^s(F) \leq \sum_{i=1}^{4^j} \alpha(s) \left(\frac{\text{diam } Q_{j,i}}{2} \right)^s = \sum_{i=1}^{4^j} \alpha(s) \left(\frac{k^j L \sqrt{2}}{2} \right)^s = 4^j \alpha(s) \left(k^j \frac{L}{\sqrt{2}} \right)^s.$$

Abbiamo fatto vedere che

$$\forall \delta > 0, \text{ se prendo } j \in \mathbb{N} \text{ con } j \geq \frac{\ln\left(\frac{\delta}{L\sqrt{2}}\right)}{\ln(k)}$$

allora

$$\mathcal{H}_\delta^s(F) \leq \alpha(s) \left(\frac{L}{\sqrt{2}} \right)^s (4k^s)^j.$$

Ora dobbiamo far tendere $\delta \rightarrow 0$; osserviamo che, per $\delta \rightarrow 0$, j devo prenderlo sempre più grande, dunque ho il seguente problema:

$$j \rightarrow \infty \Rightarrow (4k^s)^j \rightarrow ?.$$

Affinché il limite precedente sia un valore finito, devo prendere $4k^s \leq 1$:

$$\begin{aligned} 4k^s \leq 1 &\Leftrightarrow k^s \leq \frac{1}{4} \\ &\Leftrightarrow \ln(k^s) \leq \ln\left(\frac{1}{4}\right) = -\ln 4 \\ &\Leftrightarrow s(-\ln(k)) \geq \ln 4 \\ &\Leftrightarrow s \geq \frac{\ln 4}{-\ln(k)} \end{aligned}$$

allora

$$\forall j \in \mathbb{N} \Rightarrow (4k^s)^j \leq 1^j = 1;$$

dunque

$$s \geq \frac{\ln 4}{-\ln(k)} \Rightarrow \forall \delta > 0 \quad \mathcal{H}_\delta^s(F) \leq \alpha(s) \left(\frac{L}{\sqrt{2}} \right)^s.$$

Ora posso far tendere δ a 0:

$$\underbrace{\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \mathcal{H}_\delta^s(F)}_{\mathcal{H}^s(F)} \leq \alpha(s) \left(\frac{L}{\sqrt{2}} \right)^s.$$

Conclusione:

$$\forall s \geq \frac{\ln 4}{-\ln(k)} \quad \text{risulta} \quad \mathcal{H}^s(F) \leq \alpha(s) \left(\frac{L}{\sqrt{2}} \right)^s.$$

1.2.3 Nota 1

(X,d) SPAZIO METRICO $\Rightarrow \forall x \in X, \forall y \in X, \forall z \in X$ risulta $|d(x,y) - d(x,z)| \leq d(y,z)$.

Dim: Sappiamo che

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) \quad (\text{diseguaglianza triangolare})$$

$$\Rightarrow \underbrace{d(x,y) - d(x,z)}_A \leq \underbrace{d(z,y)}_B$$

$$\begin{aligned}
d(x, z) &\leq d(x, y) + d(y, z) \quad (\text{diseguaglianza triangolare}) \\
\Rightarrow \underbrace{d(x, z) - d(x, y)}_{-A} &\leq \underbrace{d(y, z)}_B
\end{aligned}$$

dunque ho:

$$A \leq B, \quad -A \leq B \Rightarrow |A| \leq B.$$

1.2.4 Nota 2

Sia (X, d) uno spazio metrico. Prendo A non vuoto con $A \subset X$ e definisco una funzione

$$\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$$

così

$$\varphi(x) = \inf_{a \in A} d(x, a).$$

Il numero $\varphi(x)$ indica la distanza del punto $x \in X$ dall'insieme A ed è usualmente indicato con $d(x, A)$.

Risulta:

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq d(x, y) \quad \forall x, y \in X$$

Dim: Siano $x, y \in X$; vogliamo valutare $\varphi(x) - \varphi(y)$ e poi, come prima, $\varphi(y) - \varphi(x)$.

$$\begin{aligned}
\varphi(x) - \varphi(y) &= \inf_{a \in A} d(x, a) - \inf_{\tilde{a} \in A} d(y, \tilde{a}) \\
\forall \epsilon > 0 \exists \tilde{a}_\epsilon \in A \text{ tale che } d(y, \tilde{a}_\epsilon) &\leq \inf_{\tilde{a} \in A} d(y, \tilde{a}) + \epsilon \\
\Rightarrow -d(y, \tilde{a}_\epsilon) &\geq -\inf_{\tilde{a} \in A} d(y, \tilde{a}) - \epsilon \\
\Rightarrow -d(y, \tilde{a}_\epsilon) + \epsilon &\geq -\inf_{\tilde{a} \in A} d(y, \tilde{a})
\end{aligned}$$

dunque:

$$\begin{aligned}
\varphi(x) - \varphi(y) &= \inf_{a \in A} d(x, a) - \inf_{\tilde{a} \in A} d(y, \tilde{a}) \\
&\leq \inf_{a \in A} d(x, a) - d(y, \tilde{a}_\epsilon) + \epsilon \\
&\leq d(x, \tilde{a}_\epsilon) - d(y, \tilde{a}_\epsilon) + \epsilon \\
&\leq d(x, y) + \epsilon \quad (\text{per la nota 1}).
\end{aligned}$$

Dunque abbiamo tirato fuori che:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \text{risulta} \quad \varphi(x) - \varphi(y) \leq d(x, y) + \epsilon,$$

per $\epsilon \rightarrow 0^+$ otteniamo $\varphi(x) - \varphi(y) \leq d(x, y)$;

quindi abbiamo fatto vedere che:

$$\forall x \in X, \forall y \in X \quad \text{risulta} \quad \varphi(x) - \varphi(y) \leq d(x, y).$$

Scambiando il ruolo di x e y si ottiene:

$$\forall x \in X, \forall y \in X \quad \text{risulta} \quad \varphi(y) - \varphi(x) \leq d(y, x).$$

A questo punto sfrutto il fatto che la distanza è simmetrica:

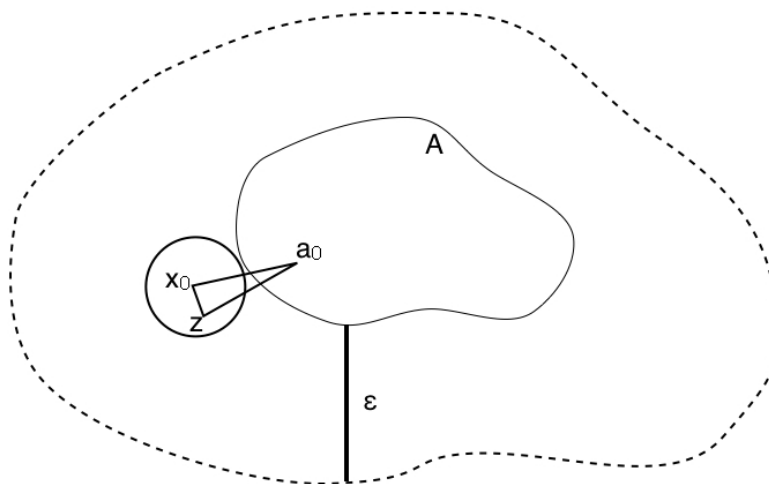
$$d(x, y) = d(y, x)$$

e

$$\left. \begin{array}{l} \varphi(x) - \varphi(y) \leq d(x, y) \\ \varphi(y) - \varphi(x) \leq d(y, x) \end{array} \right\} \Rightarrow |\varphi(x) - \varphi(y)| \leq d(x, y)$$

1.2.5 Nota 3

Sia (X, d) uno spazio metrico. Prendo A non vuoto con $A \subset X$ ed $\epsilon > 0$. Sia $A_\epsilon = \{x \in X : d(x, A) < \epsilon\}$: prendo tutti i punti che distano da A meno di ϵ . Risulta che $A \subset A_\epsilon$ e A_ϵ è aperto.



Dim:

$$\begin{aligned} \forall x \in A \quad 0 &\leq \inf_{a \in A} d(x, a) \leq d(x, x) = 0 \\ \Rightarrow \forall x \in A \quad d(x, A) &= 0 < \epsilon \Rightarrow x \in A_\epsilon \Rightarrow A \subset A_\epsilon \end{aligned}$$

Adesso mostriamo che A_ϵ è aperto. Sia $x_0 \in A_\epsilon$ allora

$$\inf_{a \in A} d(x_0, a) = d(x_0, A) < \epsilon$$

quindi

$$\exists a_0 \in A : d(x_0, a_0) < \epsilon \quad \text{allora} \quad 0 < \epsilon - d(x_0, a_0).$$

Consideriamo la palla $B(x_0, \epsilon - d(x_0, a_0))$. Se prendo $z \in B(x_0, \epsilon - d(x_0, a_0))$ allora

$$d(z, a_0) \leq d(z, x_0) + d(x_0, a_0) < \epsilon - d(x_0, a_0) + d(x_0, a_0) = \epsilon$$

quindi

$$\inf_{a \in A} d(z, a) \leq d(z, a_0) < \epsilon \Rightarrow d(z, A) < \epsilon$$

quindi $z \in A_\epsilon$. Abbiamo provato che

$$B(x_0, \epsilon - d(x_0, a_0)) \subset A_\epsilon$$

quindi A_ϵ è aperto.

1.2.6 Nota 4

Sia (X, d) uno spazio metrico e $\emptyset \neq A \subset X$; definiamo $\text{diam } A = \sup\{d(x, y) : x \in A, y \in A\}$. Risulta $\emptyset \neq A \subset B \subset X \Rightarrow \text{diam } A \leq \text{diam } B$.

Dim: Consideriamo $\{d(x, y) : x \in A, y \in A\}$ e $\{d(\tilde{x}, \tilde{y}) : \tilde{x} \in B, \tilde{y} \in B\}$. Poiché $A \subset B$ ho che:

$$\{d(x, y) : x \in A, y \in A\} \subset \{d(\tilde{x}, \tilde{y}) : \tilde{x} \in B, \tilde{y} \in B\}.$$

Passando al sup su tutti e due gli insiemi si ottiene

$$0 \leq \underbrace{\sup\{d(x, y) : x \in A, y \in A\}}_{\text{diam } A} \leq \underbrace{\sup\{d(\tilde{x}, \tilde{y}) : \tilde{x} \in B, \tilde{y} \in B\}}_{\text{diam } B}$$

.

1.2.7 Nota 5

Sia (X, d) uno spazio metrico e $\emptyset \neq A \subset X$. Per ogni $\epsilon > 0$ risulta

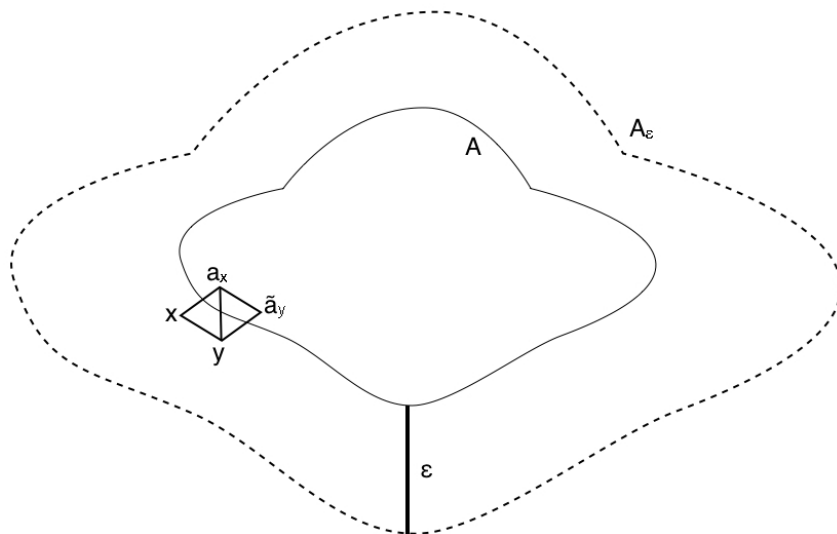
$$\text{diam } A_\epsilon \leq \text{diam } A + 2\epsilon.$$

Dim: Prendiamo $x \in A_\epsilon$:

$$\inf_{a \in A} d(x, a) = d(x, A) < \epsilon \Rightarrow \exists a_x \in A : d(x, a_x) < \epsilon;$$

prendiamo $y \in A_\epsilon$:

$$\inf_{\tilde{a} \in A} d(y, \tilde{a}) = d(y, A) < \epsilon \Rightarrow \exists \tilde{a}_y \in A : d(y, \tilde{a}_y) < \epsilon.$$



Uso la disuguaglianza triangolare:

$$\begin{aligned} d(x, y) &\leq d(x, a_x) + d(a_x, y) \\ &\leq d(x, a_x) + d(a_x, \tilde{a}_y) + d(\tilde{a}_y, y) \\ &\leq \epsilon + d(\tilde{a}_y, a_x) + \epsilon = 2\epsilon + d(a_x, \tilde{a}_y) \\ &\leq 2\epsilon + \text{diam } A. \end{aligned}$$

Quindi $d(x, y) \leq 2\epsilon + \text{diam } A$. Ora passo al sup su x e y , ottenendo:

$$\text{diam } A_\epsilon \leq 2\epsilon + \text{diam } A.$$

1.2.8 Nota 6

$x \neq y, x \in A, y \in A \Rightarrow \text{diam } A > 0$.

Dim:

$$0 < d(x, y) \leq \sup\{d(\tilde{x}, \tilde{y}) : \tilde{x} \in A, \tilde{y} \in A\} = \text{diam } A$$

1.2.9 Nota 7

Sia $A = \{x_0\}$ allora $\text{diam } A = 0$.

Dim:

$$x \in A \text{ e } y \in A \Rightarrow x = x_0 \text{ e } y = y_0 \Rightarrow d(x, y) = d(x_0, y_0) = 0$$

e questo vale per ogni coppia di punti di A ; quindi

$$\text{diam } A = \sup\{d(x, y) : x \in A, y \in A\} = 0.$$

1.2.10 Nota 8

Sia $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}^n$ ed A aperto. Allora $\text{diam } A > 0$.

Dim:

$$A \neq \emptyset \Rightarrow \exists x_0 \in A \text{ con } A \text{ aperto} \Rightarrow \exists R > 0 : B(x_0, R) \subset A.$$

Ora sfrutto il fatto che sono in $\mathbb{R}^n$:

Sia $l_1 = (1, 0, \dots, 0)$. Prendo $x_1 = x_0 + \frac{R}{2}l_1$ ed avrò

$$d(x_1, x_0) = \left\| \left(x_0 + \frac{R}{2}l_1 \right) - x_0 \right\| = \left| \frac{R}{2} \right| \|l_1\| = \left| \frac{R}{2} \right| = \frac{R}{2} > 0 \quad (R \text{ è positivo});$$

$$\frac{R}{2} < R \Rightarrow x_1 \in B(x_0, R) \quad (\text{ho trovato un altro punto distinto da } x_0 \text{ che sta in } A)$$

$$\Rightarrow_{(\text{per la Nota 6})} \text{diam } A > 0 \quad (\text{poiché } A \text{ ha almeno due punti distinti}).$$

1.2.11 Nota 9

Sia $B(x_0, R) \subset \mathbb{R}^n$, allora $\text{diam } B(x_0, R) = 2R$.

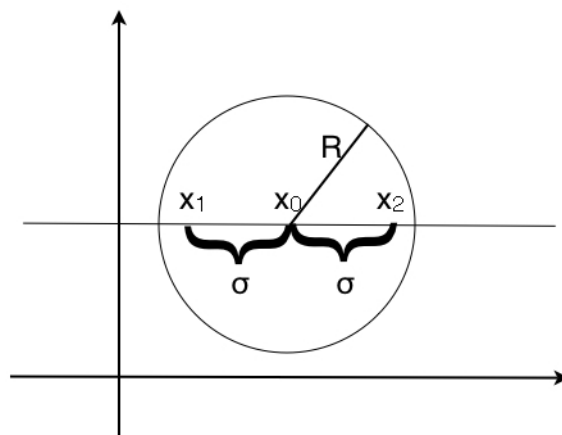
Dim: Prendo due punti che stanno nella palla:

$$x, y \in B(x_0, R) \Rightarrow \begin{cases} d(x, x_0) < R \\ d(y, x_0) < R \end{cases}$$

$$\Rightarrow d(x, y) \leq d(x, x_0) + d(x_0, y) < R + R = 2R.$$

Dunque $\forall x, y \in B(x_0, R)$ avrò che $d(x, y) < 2R$. Quando passo al sup:

$$\underbrace{\{d(x, y) : x \in B(x_0, R), y \in B(x_0, R)\}}_{\text{diam } B(x_0, R)} \leq 2R.$$



Adesso faccio vedere che il sup è precisamente uguale a $2R$. Per far vedere ciò sfrutto il fatto che sono in $\mathbb{R}^n$ e per ogni $\sigma \in (0, R)$ prendo:

$$x_1 = x_0 - \sigma l_1 \text{ e } x_2 = x_0 + \sigma l_1 \quad \text{con } l_1 = (1, 0, \dots, 0).$$

Allora

$$\begin{aligned} d(x_1, x_2) &= \|x_1 - x_2\| \\ &= \|x_0 + \sigma l_1 - (x_0 - \sigma l_1)\| \\ &= \|\sigma l_1 + \sigma l_1\| \\ &= \|2\sigma l_1\| \\ &= 2\sigma \|l_1\| \\ &= 2\sigma. \end{aligned}$$

Quando vado a vedere $d(x_1, x_0)$ e $d(x_2, x_0)$ ho che:

$$\begin{aligned} d(x_1, x_0) &= \|x_1 - x_0\| \\ &= \|x_0 - \sigma l_1 - x_0\| \\ &= \|-\sigma l_1\| \\ &= |-\sigma| \|l_1\| \\ &= \sigma < R \Rightarrow x_1 \in B(x_0, R); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d(x_2, x_0) &= \|x_2 - x_0\| \\ &= \|x_0 + \sigma l_1 - x_0\| \\ &= \|\sigma l_1\| \\ &= |\sigma| \|l_1\| \\ &= \sigma < R \Rightarrow x_2 \in B(x_0, R) \end{aligned}$$

$$\forall \sigma \in (0, R) \quad \exists x_1, x_2 \in B(x_0, R) : d(x_1, x_2) = 2\sigma.$$

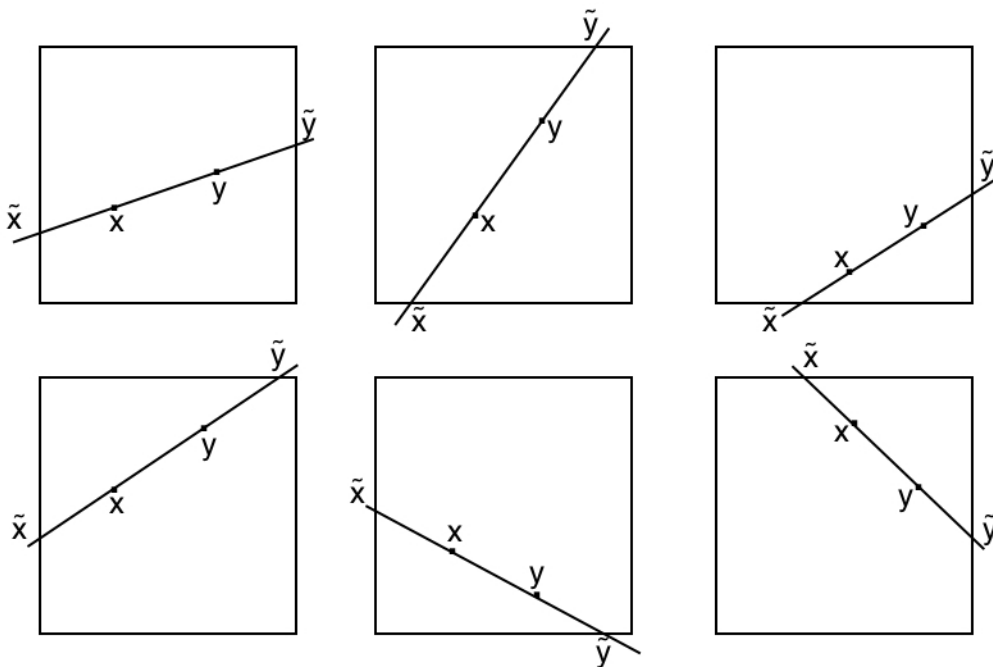
Quindi $2\sigma = d(x_1, x_2) \leq \text{diam } B(x_0, R)$. Allora $\forall \sigma \in (0, R)$, $2\sigma \leq \text{diam } B(x_0, R) \leq 2R$:

per $\sigma \rightarrow R^-$ risulta $2R \leq \text{diam } B(x_0, R) \leq 2R$ quindi $\text{diam } B(x_0, R) = 2R$.

1.2.12 Nota 10

A =quadrato chiuso in $\mathbb{R}^2$ di lato l allora $\text{diam } A = l\sqrt{2}$.

Dim: Prendo $x, y \in A$; posso avere i seguenti casi:



Calcolo le distanze di $\tilde{x}$ e $\tilde{y}$ usando il teorema di Pitagora:

$$d(x, y) \leq d(\tilde{x}, \tilde{y}) = \sqrt{\text{base}^2 + \text{altezza}^2} \leq \sqrt{l^2 + l^2} = l\sqrt{2}.$$

Quindi $d(x, y) \leq l\sqrt{2}$. Passando al sup su x e y ho che:

$$\text{diam } A \leq l\sqrt{2} = \text{diagonale quadrato};$$

ma per la definizione di diametro:

$$\text{diam } A = \sup\{d(x, y) : x \in A, y \in A\} \geq \text{diagonale quadrato} = l\sqrt{2}; \text{ allora } \text{diam } A = l\sqrt{2}.$$

1.2.13 Andamento di $\frac{\ln 4}{(-\ln k)}$

Domanda: Come varia $f(k) = \frac{\ln 4}{-\ln k}$ con $0 < k < 1$ al variare di k ?

Risulta

$$f'(k) = \ln 4 \frac{1}{k (\ln k)^2} > 0 \quad \forall k \in (0, 1)$$

$$\Rightarrow f(k) \text{ cresce strettamente in } (0, 1)$$

$$\lim_{k \rightarrow 0^+} f(k) = \lim_{k \rightarrow 0^+} \frac{\ln 4}{-\ln k} = 0$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\ln 4}{-\ln \frac{1}{2}} = \frac{\ln 4}{\ln 2} = 2 \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = 2$$

$$\inf_{k \in (0, \frac{1}{2})} f(k) = 0 \quad \text{e} \quad \sup_{k \in (0, \frac{1}{2})} f(k) = 2.$$

Allora f è continua $\Rightarrow f \in C^0((0, \frac{1}{2}))$ quindi $\forall \lambda : 0 < \lambda < 2 \exists! k_\lambda \in (0, \frac{1}{2})$ tale che:

$$\lambda = \frac{\ln 4}{-\ln k_\lambda}.$$

1.2.14 Per quali valori di s , $\mathcal{H}^s(F) > 0$

Torniamo all'insieme di Cantor F . Abbiamo già osservato che $\mathcal{H}^s(F) = +\infty$. Fisso $s > 0$. Sia $\{V_r\}_r$ un ricoprimento di F al più numerabile con $V_r \neq \emptyset$ per ogni r . Sfrutto la compattezza di F per estrarre da $\{V_r\}_r$ un ricoprimento finito ma questo lo posso fare solamente se ho un ricoprimento di aperti. Siccome stiamo lavorando con la misura di Hausdorff il nostro ricoprimento è fatto di insiemi qualunque: dunque procedo ingrandendo un pochino gli insiemi del ricoprimento in modo da farli diventare aperti.

Precisamente, sia $\epsilon > 0$:

$$\forall r \in \mathbb{N} \forall \sigma_r > 0 \text{ considero } (V_r)_{\sigma_r} = \{x \in \mathbb{R}^2 : d(x, V_r) < \sigma_r\}$$

Per la nota 3 si ha che $(V_r)_{\sigma_r}$ è aperto e per la nota 5 risulta

$$\text{diam } (V_r)_{\sigma_r} \leq \text{diam } (V_r) + 2\sigma_r. \quad (1.1)$$

Ora considero

$$\sum_{r=1}^{+\infty} \alpha(s) \left(\frac{\text{diam } (V_r)_{\sigma_r}}{2} \right)^s.$$

Per la 1.1 ho che:

$$\left(\frac{\text{diam}(V_r)_{\sigma_r}}{2}\right)^s \leq \left(\frac{\text{diam}(V_r)}{2} + \sigma_r\right)^s = (A + B)^s$$

poiché $A \geq 0$, $B \geq 0$, $s > 0$, risulta

$$(A + B)^s \leq 2^s(A^s + B^s) = 2^s\left(\left(\frac{\text{diam}(V_r)}{2}\right)^s + (\sigma_r)^s\right);$$

dunque

$$\sum_{r=1}^{+\infty} \alpha(s) \left(\frac{\text{diam}(V_r)_{\sigma_r}}{2}\right)^s \leq \sum_{r=1}^{+\infty} \alpha(s) (\text{diam}(V_r))^s + \underbrace{\sum_{r=1}^{+\infty} \alpha(s) 2^s (\sigma_r)^s}_{\text{voglio questa quantità } \leq \epsilon}.$$

Notiamo che:

$$\sum_{r=1}^{+\infty} \alpha(s) 2^s (\sigma_r)^s = \alpha(s) 2^s \sum_{r=1}^{+\infty} (\sigma_r)^s \leq \epsilon \Leftrightarrow \sum_{r=1}^{+\infty} (\sigma_r)^s \leq \frac{\epsilon}{\alpha(s) 2^s}.$$

Osservazione: Consideriamo la serie geometrica:

$$\sum_{r=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^r = \sum_{r=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^r - 1 = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} - 1 = 2 - 1 = 1;$$

vogliamo che:

$$(\sigma_r)^s = \left(\frac{1}{2}\right)^r \frac{\epsilon}{\alpha(s) 2^s} \Rightarrow \sigma_r = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^r \frac{\epsilon}{\alpha(s) 2^s}\right]^{\frac{1}{s}}.$$

Fino ad ora abbiamo fatto vedere che

$$F \subset \bigcup_{r=1}^{+\infty} V_r \subset \bigcup_{r=1}^{+\infty} (V_r)_{\sigma_r}$$

così facendo si ottiene un ricoprimento di aperti per l'insieme di Cantor, e si ha:

$$\sum_{r=1}^{+\infty} \alpha(s) \left(\frac{\text{diam}(V_r)_{\sigma_r}}{2}\right)^s \leq \epsilon + \sum_{r=1}^{+\infty} \alpha(s) (\text{diam}(V_r))^s.$$

F compatto, $F \subset \bigcup_{r=1}^{+\infty} (V_r)_{\sigma_r} \Rightarrow \exists$ un sottoricoprimento finito cioè:

$$\exists p \in \mathbb{N} \quad \text{tale che} \quad F \subset \tilde{V}_1 \cup \tilde{V}_2 \cup \cdots \cup \tilde{V}_p \quad \text{dove} \quad \tilde{V}_r = (V_r)_{\sigma_r};$$

quindi

$$E \subset \bigcup_{r=1}^p \tilde{V}_r \quad \text{con } \tilde{V}_r \text{ aperto } \neq \emptyset.$$

Quindi:

$$\sum_{r=1}^p \alpha(s) \left(\frac{\text{diam}(\tilde{V}_r)}{2} \right)^s = \sum_{r=1}^p \alpha(s) \left(\frac{\text{diam}(V_r)_{\sigma_r}}{2} \right)^s \leq \sum_{r=1}^p \alpha(s) (\text{diam } V_r)^s + \epsilon.$$

Caso 1: Se esiste un indice $\hat{i} \in \{1, 2, \dots, p\} : \text{diam}(\tilde{V}_{\hat{i}}) \geq L(1 - 2k)$ allora:

$$\sum_{i=1}^p (\text{diam}(\tilde{V}_i))^s \geq (\text{diam} \tilde{V}_{\hat{i}})^s \geq L^s (1 - 2k)^s.$$

Caso 2: Se invece

$$\forall i = 1, 2, \dots, p : \text{diam} \tilde{V}_i < L(1 - 2k)$$

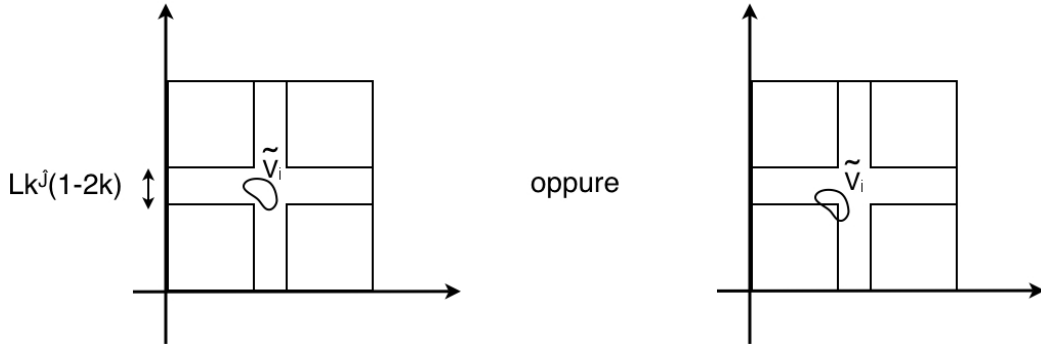
allora scompongo l'intervallo $(0, L(1 - 2k))$ nel seguente modo:

$$(0, L(1 - 2k)) = \bigcup_{j=0}^{+\infty} [Lk^{j+1}(1 - 2k), Lk^j(1 - 2k)).$$

Per ogni $i = 1, 2, \dots, p$ esiste un unico $\hat{j} = \hat{j}(i) \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tale che

$$Lk^{\hat{j}+1}(1 - 2k) \leq \text{diam} \tilde{V}_i < Lk^{\hat{j}}(1 - 2k). \quad (1.2)$$

Poiché $Lk^{\hat{j}}(1 - 2k)$ è la distanza minima tra due quadrati che compongono $E_{\hat{j}+1}$, si può verificare che:



cioè $\tilde{V}_i$ interseca al più un quadrato di $E_{\hat{j}+1}$.

Allora cosa accade al passo successivo?

$\tilde{V}_i$ interseca al più 4 quadrati di $E_{\hat{j}+1+1}$.

Quando vado a vedere che cosa accade al passo $\hat{j} + 3$ ho che:

$\tilde{V}_i$ interseca al più 4^2 quadrati di $E_{\hat{j}+2+1}$.

Andando avanti:

$\tilde{V}_i$ interseca al più 4^q quadrati di $E_{\hat{j}+q+1}$.

A questo punto prendo $h \geq \hat{j} + 1$ ed ho che

$\tilde{V}_i$ interseca al più $4^{h-(\hat{j}+1)}$ quadrati di E_h .

Scrivo così:

$$4^{h-(\hat{j}+1)} = 4^h (4^{-1})^{\hat{j}+1}. \quad (1.3)$$

Se avessi la disuguaglianza $4^{-1} \leq k^s$ potrei migliorare nella (1.3), ottenendo:

$$4^{h-(\hat{j}+1)} \leq 4^h (k^s)^{\hat{j}+1} = 4^h (k^{\hat{j}+1})^s \leq \left(\frac{\text{diam } \tilde{V}_i}{L(1-2k)} \right)^s 4^h,$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato la disuguaglianza di sinistra nella 1.3.

Dunque abbiamo scoperto che $\forall i = 1, 2, \dots, p$ e $\forall h \geq \hat{j}(i) + 1$, si ha

$\tilde{V}_i$ interseca al più $4^h \left(\frac{\text{diam } \tilde{V}_i}{L(1-2k)} \right)^s$ quadrati di E_h .

A questo punto vorrei una stima che andasse bene per tutti gli i .

Sia $\bar{j} = \max\{\hat{j}(1), \hat{j}(2), \dots, \hat{j}(p)\}$ allora:

$\forall h \geq \bar{j} + 1 \quad \forall i = 1, 2, \dots, p$ risulta che $\tilde{V}_i$ interseca al più $4^h \left(\frac{\text{diam } \tilde{V}_i}{L(1-2k)} \right)^s$ quadrati di E_h ,

e

$$\bigcup_{i=1}^p \tilde{V}_i \text{ interseca al più } \sum_{i=1}^p 4^h \left(\frac{\text{diam } \tilde{V}_i}{L(1-2k)} \right)^s \text{ quadrati di } E_h.$$

Però

$$\begin{aligned} & \bigcup_{i=1}^p \tilde{V}_i \supset F \supset W_h = \{\text{vertici dei quadrati di } E_h\} \\ \Rightarrow & \bigcup_{i=1}^p \tilde{V}_i \text{ interseca almeno tutti i quadrati di } E_h \text{ che sono } 4^h. \end{aligned}$$

Sia N = numero dei quadrati di E_h intersecati da $\bigcup_{i=1}^p \tilde{V}_i$; devo avere

$$4^h \leq N \leq \sum_{i=1}^p 4^h \left(\frac{\text{diam } \tilde{V}_i}{L(1-2k)} \right)^s \Rightarrow 4^h \leq \sum_{i=1}^p 4^h \left(\frac{\text{diam } \tilde{V}_i}{L(1-2k)} \right)^s \Rightarrow 1 \leq \sum_{i=1}^p \left(\frac{\text{diam } \tilde{V}_i}{L(1-2k)} \right)^s$$

quindi

$$L^s(1-2k)^s \leq \sum_{i=1}^p (\text{diam } \tilde{V}_i)^s.$$

Allora, sia nel primo che nel secondo caso abbiamo:

$$L^s(1-2k)^s \leq \sum_{i=1}^p \text{diam } \tilde{V}_i.$$

In virtù di quanto determinato fino ad ora possiamo concludere che:

$$\frac{\alpha(s)}{2} L^s(1-2k)^s \leq \sum_{i=1}^p \alpha(s) \left(\frac{\text{diam } \tilde{V}_i}{2} \right)^s \leq \epsilon + \sum_{r=1}^{+\infty} \alpha(s) (\text{diam } V_r)^s$$

per cui abbiamo fatto vedere che $\forall \delta > 0, \forall \{V_r\}_{r \in \mathbb{N}}$ con $E \subset \bigcup_{r=1}^{+\infty} V_r$ con $\text{diam } V_r \leq \delta$, e $\forall \epsilon > 0$ ho che:

$$\frac{\alpha(s)}{2^s} L^s(1-2k)^s \leq \epsilon + \sum_{r=1}^{+\infty} \alpha(s) (\text{diam } V_r)^s.$$

Se faccio tendere ϵ a 0^+ , ottengo che

$$\frac{\alpha(s)}{2^s} L^s(1-2k)^s \leq \sum_{r=1}^{+\infty} \alpha(s) (\text{diam } V_r)^s.$$

Per ottenere la misura di Hausdorff, divido entrambi i membri per 2^s ed ottengo che

$$\frac{\alpha(s)}{2^s} \frac{L^s(1-2k)^s}{2^s} \leq \sum_{r=1}^{+\infty} \alpha(s) \left(\frac{\text{diam } V_r}{2} \right)^s.$$

Posso ora passare all'inf tra tutti i ricoprimenti $\{V_r\} : F \subset \bigcup_{r=1}^{+\infty} V_r$ e $\text{diam } V_r \leq \delta$ (la sommatoria continuerà ad essere bloccata dal minorante poiché esso è un numero che non dipende dal ricoprimento):

$$\begin{aligned} \frac{\alpha(s)}{2^s} \frac{L^s(1-2k)^s}{2^s} &\leq \inf \left\{ \sum_{r=1}^{+\infty} \alpha(s) \left(\frac{\text{diam } V_r}{2} \right)^s : F \subset \bigcup_{r=1}^{+\infty} V_r \text{ e } \text{diam } V_r \leq \delta \right\} = \mathcal{H}_\delta^s(F) \\ &\Rightarrow \frac{\alpha(s)}{2^s} \frac{L^s(1-2k)^s}{2^s} \leq \mathcal{H}_\delta^s(F) \quad \forall \delta > 0 \\ &\Rightarrow \frac{\alpha(s)}{2^s} \frac{L^s}{2^s} (1-2k)^s \leq \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \mathcal{H}_\delta^s(F) = \mathcal{H}^s(F). \end{aligned}$$

I calcoli scritti sopra valgono se $4^{-1} \leq k^s$, cioè $\ln(4^{-1}) \leq \ln(k^s)$ cioè $-\ln 4 \leq s \ln k$ cioè $\ln 4 \geq s(-\ln k)$ cioè $s \leq \frac{\ln 4}{-\ln k}$.

1.2.15 Conclusione

$$s \geq \frac{\ln 4}{-\ln k} \Rightarrow \mathcal{H}^s(F) \leq \alpha(s) \left(\frac{L}{\sqrt{2}} \right)^s.$$

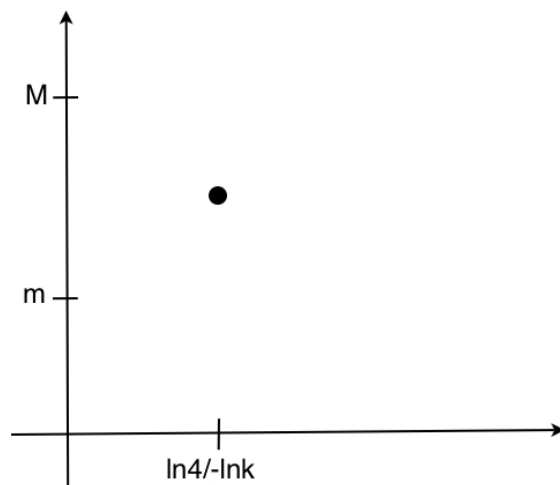
Sia $0 < s \leq \frac{\ln 4}{-\ln k}$, allora

$$\frac{\alpha(s)}{2^s} \frac{L^s}{2^s} (1-2k)^s \leq \mathcal{H}^s(F).$$

Quindi

$$s = \frac{\ln 4}{-\ln k} \Rightarrow 0 < \underbrace{\frac{\alpha(s)}{2^s} \frac{L^s (1-2k)^s}{2^s}}_m \leq \mathcal{H}^s(F) \leq \underbrace{\alpha(s) \left(\frac{L}{\sqrt{2}} \right)^s}_M < +\infty$$

con $0 < (1-2k)$ perchè $k < \frac{1}{2}$.



Per quanto visto in 1.2.13.

A questo punto possiamo concludere che:

$$\forall \lambda \in (0, 2) \exists! k \in (0, \frac{1}{2}) \text{ tale che } \frac{\ln 4}{-\ln k} = \lambda$$

e l'insieme di Cantor F costruito con tale k ha la dimensione

$$\dim_{\mathcal{H}}(F) = \frac{\ln 4}{-\ln k} = \lambda.$$