UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI L'AQUILA

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea Specialistica in Matematica

Lezioni di Teoria delle Funzioni e Metodi Variazionali

TEORIA DELL'INTEGRAZIONE

Studentessa
Lucilla Macchiagodena

Professore
Francesco Leonetti

Anno Accademico 2003-2004

Indice

Capitolo 1

Elementi di teoria della misura

1.1 Misure

In questo capitolo introduciamo alcune nozioni fondamentali della teoria della misura, che saranno necessarie per poter presentare le proprietà principali della teoria dell'integrazione astratta.

Definizione 1.1.1. *Sia X un insieme e sia $\mathcal{P}(X)$ l'insieme delle sue parti. Una applicazione $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ è detta una* **misura (esterna)** *su X se*

1. *$\mu(\emptyset) = 0$;*
2. *se $A \subset \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i \subset X$, allora*

$$\mu(A) \leq \sum_{i=1}^{+\infty} \mu(A_i) \ .$$

Nota 1.1.1. *La misura è un'applicazione monotona rispetto all'inclusione: data una misura μ sull'insieme X e dati $A \subset B \subset X$, allora $\mu(A) \leq \mu(B)$.*

Consideriamo un insieme X e una misura μ su esso definita. Definiamo l'insieme

$$\mathcal{M}_\mu(X) = \{\ A \subset X :\ \mu(B) = \mu(B \cap A) + \mu(B \backslash A)\ \ \forall\ B \subset X\} \ , \qquad (1.1)$$

detto collezione di tutti gli insiemi A di X che spaccano bene ogni insieme $B \subset X$. Gli elementi di $\mathcal{M}_\mu(X)$ sono detti μ-misurabili, per cui esso costituisce la famiglia degli insiemi di X che sono μ-misurabili. Dunque $\mathcal{M}_\mu(X)$ è un sottoinsieme dell'insieme delle parti di X, che può essere sia proprio, sia tutto $\mathcal{P}(X)$, a seconda della misura μ che stiamo considerando.

Teorema 1.1.1. *Sia dato un insieme X con una misura μ e sia $\mathcal{M}_\mu(X)$ la famiglia degli insiemi μ-misurabili di X. Allora*

1. $\emptyset \in \mathcal{M}_\mu(X)$, $X \in \mathcal{M}_\mu(X)$;
2. $A \in \mathcal{M}_\mu(X) \Rightarrow X \backslash A \in \mathcal{M}_\mu(X)$;
3. *se* $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_\mu(X)$, *allora*
$$\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i \ \in \mathcal{M}_\mu(X) \ ,$$
$$\bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i \ \in \mathcal{M}_\mu(X) \ ;$$
4. *Proprietà di numerabile additività:*

   se $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_\mu(X)$ *con* $A_i \cap A_j = \emptyset \ \ \forall\ i \neq j$, *allora*
$$\mu(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mu(A_i) \ ;$$
5. *se* $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_\mu(X)$, $A_i \subset A_{i+1} \ \ \forall\ i$, *allora*
$$\mu(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i) = \lim_{i\to+\infty} \mu(A_i) \ ;$$
6. *se* $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_\mu(X)$, $A_i \supset A_{i+1} \ \ \forall\ i$, $\mu(A_1) < +\infty$, *allora*
$$\mu(\bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i) = \lim_{i\to+\infty} \mu(A_i) \ .$$

Definizione 1.1.2. *Sia X un insieme. $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ è detta* **$\boldsymbol{\sigma}$-algebra** *se valgono le seguenti proprietà:*

1. *$\emptyset \in \mathcal{A}$, $X \in \mathcal{A}$;*
2. *$B \in \mathcal{A} \Rightarrow X \setminus B \in \mathcal{A}$;*
3. *se $\{B_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$, allora*
$$\bigcup_{i=1}^{+\infty} B_i \ \in \mathcal{A}\ .$$

Osservazione 1.1.1. *$\mathcal{P}(X)$ è una σ-algebra.*

Osservazione 1.1.2. *Se X è un insieme dotato di una misura μ, allora la famiglia dei suoi sottoinsiemi μ-misurabili, $\mathcal{M}_\mu(X)$, è una σ-algebra per il teorema 1.1.1.*

Proposizione 1.1.1. *Sia dato un isieme X e sia data la famiglia di σ-algebre di sottoinsiemi di X $\{\mathcal{A}_j\}_{j\in J}$. Allora detta $\mathcal{C} = \bigcap_{j\in J} \mathcal{A}_j$, essa è ancora una σ-algebra.*

Osserviamo che questa proprietà è vera qualunque sia la cardinalità dell'insieme degli indici J, numerabile o infinita.

Dimostrazione:

$\mathcal{C}$ è una σ-algebra se ne verifica le proprietà:

1. X, $\emptyset \in \mathcal{A}_j \ \ \forall\, j \in J$, poiché $\mathcal{A}_j$ è una σ-algebra.
   $\Rightarrow \quad X \in \mathcal{C} \quad$ e $\quad \emptyset \in \mathcal{C}$.
2. Sia $B \in \mathcal{C} \quad \Rightarrow \quad B \in \mathcal{A}_j \ \ \forall\, j \in J$.
   $\Rightarrow \quad X \setminus B \in \mathcal{A}_j$, poiché $\mathcal{A}_j$ è una σ-algebra, $\forall\, j \in J$.
   $\Rightarrow \quad X \setminus B \in \bigcap_{j\in J} \mathcal{A}_j = \mathcal{C}$.
3. Consideriamo la famiglia $\{B_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}$.
   $\Rightarrow \quad \{B_i\}_{i\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}_j \ \ \forall\, j \in J$.
   Ogni $\mathcal{A}_j$ è una σ-algebra, dunque $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i \in \mathcal{A}_j$.
   $\Rightarrow \quad \bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i \in \mathcal{C} = \bigcap_{j\in J} \mathcal{A}_j$.

Dunque la tesi è verificata. □

1.2 Esempi

Consideriamo uno spazio metrico (X, d), dove d è la metrica; vogliamo definire una particolare σ-algebra di X, quella che contenga tutti i sottoinsiemi aperti di X. In generale $\mathcal{A}(X) = \{\ B \subset X : B \text{ è aperto } \}$ è un sottoinsieme delle parti di X, ma non è una σ-algebra. Se si considerano tutte le σ-algebre $\mathcal{A}_i$ di sottoinsiemi di X che contengono $\mathcal{A}(X)$ e se ne fa l'intersezione, per la proposizione 1.1.1 si ottiene un insieme $\mathcal{B}(X)$ che verifica le proprietà di una σ-algebra. In particolare, $\mathcal{B}(X)$ è la più piccola σ-algebra che contiene gli aperti di X ed è detta la ***σ-algebra di Borel***, mentre i suoi elementi sono chiamati ***insiemi di Borel*** o *Boreliani*.

Definizione 1.2.1. *Sia (X, d) uno spazio metrico e μ una misura su X. Diremo che μ è una* **misura di Borel** *se $\mathcal{B}(X) \subset \mathcal{M}_\mu(X)$.*

Osserviamo che in $\mathcal{B}(X)$ sono contenuti anche i chiusi dello spazio metrico; dunque i chiusi sono dei boreliani e sono degli insiemi μ-misurabili.

Definizione 1.2.2. *Una misura μ di* **Borel** *si dice* **regolare** *se vale la proprietà*

$$\forall\ D \subset X \quad \exists\ B\ \in \mathcal{B}(X)\ :\ D \subset B \quad e \quad \mu(D) = \mu(B)\ .$$

Definizione 1.2.3. *Se μ è una misura di Borel regolare e verifica $\mu(K) < +\infty$, $\forall\ K \subset X$ compatto, allora μ è detta* **misura di Radon***.*

Un esempio di misura di Radon, è la misura di Lebesgue n-dimensionale, $\mathcal{L}^n$, definita su $\mathbb{R}^n$, con la metrica euclidea. La misura di Lebesgue su $\mathbb{R}$ è quella che pone

$$\mathcal{L}^1\left((a, b)\right) = b - a\ , \tag{1.2}$$

ossia rappresenta la lunghezza dell'intervallo.
Su $\mathbb{R}^2$, invece, dato un sottoinsieme $A \subset \mathbb{R}^2$, $\mathcal{L}^2(A)$ è l'area di A; così su $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{L}^3(A)$ è la misura che associa ad ogni sottoinsieme $A \subset \mathbb{R}^3$ il suo volume. Ricordiamo che $\mathcal{M}_{\mathcal{L}^1}(\mathbb{R}) \subsetneqq \mathcal{P}(X)$.

Facciamo altri due esempi importanti di misura.

1. **Misura di Dirac concentrata in un punto**
   Dato l'insieme X e un suo punto x_0, si definisce misura di Dirac concentrata in x_0 l'applicazione $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ tale che $\forall\ A \subset X$

$$\mu(A) = \begin{cases} 1 & x_0 \in A, \\ 0 & x_0 \notin A. \end{cases} \tag{1.3}$$

In questo caso tutti i sottoinsiemi di X sono μ-misurabili, cioè $\mathcal{P}(X) = \mathcal{M}_\mu(X)$. Talvolta la misura di Dirac concentrata in x_0 viene denotata con δ_{x_0}.

2. Presentiamo una misura che viene dalla probabilità di Bernoulli, legata al gioco di testa o croce.
   Sia $X = \{t, c\}$, allora $\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, X, \{t\}, \{c\}\}$, detto anche insieme degli eventi. La misura $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ è quella che assegna il 50% di possibilità agli eventi di testa e croce:

$$\begin{aligned} \mu(\emptyset) &= 0 \ , \\ \mu(\{t\}) &= 1/2 \ , \\ \mu(\{c\}) &= 1/2 \ , \\ \mu(X) &= 1 \ . \end{aligned} \tag{1.4}$$

   Anche in questo caso $\mathcal{P}(X) = \mathcal{M}_\mu(X)$.

Capitolo 2

Integrazione: prima parte

In questo capitolo vogliamo introdurre le nozioni e le proprietà principali della teoria dell'integrazione rispetto ad una generica misura.

Consideriamo un insieme X e sia μ una misura definita su X; sia $\mathcal{M}_\mu(X)$ la famiglia degli insiemi μ-misurabili.

2.1 Funzioni semplici

Procediamo nel nostro intento per gradi. La funzione indicatrice di un insieme $A \subset X$ è così definita

$$1_A : X \to \mathbb{R}$$

e

$$1_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A, \\ 0 & x \notin A. \end{cases}$$

Definizione 2.1.1. *Una funzione $\varphi : X \to \mathbb{R}$ si dice* **semplice** *se esistono $k \in \mathbb{N}$, $E_1, \ldots, E_k$ insiemi μ-misurabili a due a due disgiunti con $\bigcup_{i=1}^k E_i = X$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ tali che*

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i 1_{E_i}(x) \ , \quad \forall\ x \in X \ .$$

Esempio 2.1.1. *La funzione indicatrice di un insieme A μ-misurabile è una funzione semplice.*

Indichiamo con $\mathscr{S}$ l'insieme di tutte le funzioni semplici definite sull'insieme X. Osserviamo che $\mathscr{S}$ è non vuoto poiché 1_X vi appartiene. Inoltre, detto $A \subset X$ un insieme μ-misurabile, risulta che $1_A \in \mathscr{S}$.

Osservazione 2.1.1. Nel seguito useremo spesso la nozione di *partizione μ-misurabile di X* relativa a degli insiemi $I_1, \dots, I_n$; essa sta ad indicare che gli insiemi $I_1, \dots, I_n$ appartengono alla σ-algebra $\mathcal{M}_\mu(X)$, che sono a due a due disgiunti e che $\bigcup_{i=1}^k I_i = X$.

Nota 2.1.1. *Siano φ e ψ delle funzioni semplici. Allora esistono $k \in \mathbb{N}$, $E_1, \dots, E_k$ partizione μ-misurabile di X, $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, $\nu_1, \dots, \nu_k \in \mathbb{R}$ tali che $\forall\ x \in X$*

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i 1_{E_i}(x) \ , \quad \psi(x) = \sum_{i=1}^{k} \nu_i 1_{E_i}(x) \ .$$

Dimostrazione:

Sia $\varphi \in \mathscr{S} \quad \Rightarrow \quad \exists\ \ k_1 \in \mathbb{N},\ \exists\ \ A_1, \dots, A_{k_1}$ partizione μ-misurabile di X, $\exists\ \ a_1, \dots, a_{k_1} \in \mathbb{R}$ tali che

$$\varphi(x) = \sum_{r=1}^{k_1} a_r 1_{A_r}(x) \ , \quad \forall\ x \in X \ .$$

Sia $\psi \in \mathscr{S} \quad \Rightarrow \quad \exists\ \ k_2 \in \mathbb{N},\ \exists\ \ B_1, \dots, B_{k_2}$ partizione μ-misurabile di X, $\exists\ \ b_1, \dots, b_{k_2} \in \mathbb{R}$ tali che

$$\psi(x) = \sum_{s=1}^{k_2} b_s 1_{B_s}(x) \ , \quad \forall\ x \in X \ .$$

Sia $E_{r,s} = A_r \cap B_s$; esso è un insieme μ-misurabile poiché A_r e B_s lo sono. Consideriamo un altro insieme $E_{r',s'} = A_{r'} \cap B_{s'}$ e supponiamo che $(r,s) \neq (r',s')$. Allora si può avere uno dei seguenti casi:

- $r \neq r'$:
  $E_{r,s} \cap E_{r',s'} \subset A_r \cap A_{r'} = \emptyset$, per definizione di $\{A_i\}_i$ partizione μ-misurabile.

- $s \neq s'$:
  $E_{r,s} \cap E_{r',s'} \subset B_s \cap B_{s'} = \emptyset$, per definizione di $\{B_j\}_j$ partizione μ-misurabile.

Allora, in ogni caso, gli $\{E_{r,s}\}_{r,s}$ sono una famiglia di insiemi a due a due disgiunti; inoltre, per come sono definiti, $\bigcup_{r,s} E_{r,s} \subset X$.
Sia $x \in X$; ricordiamo che $X = \bigcup_{r=1}^{k_1} A_r = \bigcup_{s=1}^{k_2} B_s$. Allora

$$\exists\ r : x \in A_r\ , \exists\ s : x \in B_s \text{ quindi } x \in A_r \cap B_s = E_{r,s} \text{ dunque } x \in \bigcup_{r,s} E_{r,s}\ .$$

Quindi, si può concludere che la famiglia $\{E_{r,s}\}_{r,s}$ è una partizione finita di insiemi μ-misurabili.
Poniamo $\lambda_{r,s} = a_r$ e $\nu_{r,s} = b_s$. Se $x \in X$

$$\exists\ i \in \{\ 1, \ldots, k_1\}\ , \exists\ j \in \{1, \ldots, k_2\} \text{ tali che } x \in A_i \quad \text{e } x \in B_j\ ; \text{ quindi } x \in E_{i,j}\ .$$

Inoltre, se $r \neq i$ allora $x \notin A_r$; quindi $1_{A_r}(x) = 0$, dunque

$$\varphi(x) = \sum_{r=1}^{k_1} a_r 1_{A_r}(x) = a_i 1_{A_i}(x) = a_i = \lambda_{i,j} = \lambda_{i,j} 1_{E_{i,j}}(x)\ .$$

Se $s \neq j$ allora $x \notin B_s$; quindi $x \notin E_{i,s}$, dunque

$$\lambda_{i,j} 1_{E_{i,j}}(x) = \sum_{s=1}^{k_2} \lambda_{i,s} 1_{E_{i,s}}(x)\ .$$

Inoltre, se $r \neq i$ allora $x \notin A_r$; quindi $x \notin E_{r,s}$, dunque

$$\sum_{s=1}^{k_2} \lambda_{i,s} 1_{E_{i,s}}(x) = \sum_{r=1}^{k_1} \sum_{s=1}^{k_2} \lambda_{r,s} 1_{E_{r,s}}(x)\ .$$

Allora, se $x \in X$ risulta che

$$\varphi(x) = \sum_{r=1}^{k_1} \sum_{s=1}^{k_2} \lambda_{r,s} 1_{E_{r,s}}(x)\ . \tag{2.1}$$

Il ragionamento per la funzione semplice ψ è del tutto analogo e si ha che

$$\psi(x) = \sum_{s=1}^{k_2} \sum_{r=1}^{k_1} \nu_{r,s} 1_{E_{r,s}}(x)\ , \qquad \forall\ x \in X\ . \tag{2.2}$$

$\square$

Per definire l'integrale ci limitiamo alle misure finite: d'ora in poi supporremo che

$$\mu(X) < +\infty \ . \tag{2.3}$$

Definizione 2.1.2. *Sia $\varphi = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i 1_{E_i}$ una funzione semplice, dove λ_i, E_i sono come nella definizione 2.1.1. Si definisce* **integrale della funzione** φ *sull'insieme X rispetto alla misura μ la quantità*

$$\int_X \varphi \ \mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mu(E_i) \ .$$

Osserviamo che l'ipotesi (2.3) garantisce che la definizione di integrale di una funzione semplice, appena data, sia ben posta. Infatti, poiché ogni E_i è un sottoinsieme di X, vale che

$$0 \ \le \ \mu(E_i) \ \le \ \mu(X) \ < \ +\infty \ , \tag{2.4}$$

da cui risulta allora che la misura di ogni insieme E_i è finita. Dunque l'integrale di una generica funzione semplice è un numero reale.

Nota 2.1.2. *La definizione di integrale non dipende dalla partizione μ-misurabile scelta per l'insieme X. Infatti, se $\{A_i\}_i$ e $\{B_j\}_j$ sono due partizioni μ-misurabili di X tali che $\forall \ x \in X$*

$$\varphi(x) = \sum_{r=1}^{k_1} a_r 1_{A_r} = \sum_{s=1}^{k_2} b_s 1_{B_s} \ ,$$

allora

$$\sum_{r=1}^{k_1} a_r \mu(A_r) = \sum_{s=1}^{k_2} b_s \mu(B_s) \ .$$

Dimostrazione:

Le due scritture per la stessa funzione φ portano a considerare le due funzioni semplici su X

$$\varphi(x) = \sum_{r=1}^{k_1} a_r 1_{A_r}(x) \qquad \text{e} \qquad \psi(x) = \sum_{s=1}^{k_2} b_s 1_{B_s}(x) \ .$$

Definiamo gli insiemi $E_{r,s} = A_r \cap B_s$, i valori $\lambda_{r,s} = a_r$ e $\nu_{r,s} = b_s, \forall\ r$ e $\forall\ s$. Risulta che

$$A_r = A_r \cap X = A_r \cap \left(\bigcup_{s=1}^{k_2} B_s \right) = \bigcup_{s=1}^{k_2} (A_r \cap B_s) = \bigcup_{s=1}^{k_2} E_{r,s}\ .$$

Gli $E_{r,s}$ sono insiemi μ-misurabili e a due a due disgiunti, allora per la proprietà additiva della misura

$$\mu(A_r) = \mu \left(\bigcup_{s=1}^{k_2} E_{r,s} \right) = \sum_{s=1}^{k_2} \mu(E_{r,s})\ , \qquad \forall\ r\ . \tag{2.5}$$

Analogamente a quanto detto per la famiglia degli $\{A_r\}_r$, per la famiglia dei $\{B_s\}_s$ si ha che

$$B_s = B_s \cap X = B_s \cap \left(\bigcup_{r=1}^{k_1} A_r \right) = \bigcup_{r=1}^{k_1} (B_s \cap A_r) = \bigcup_{r=1}^{k_1} E_{r,s}$$

e che

$$\mu(B_s) = \mu \left(\bigcup_{r=1}^{k_1} E_{r,s} \right) = \sum_{r=1}^{k_1} \mu(E_{r,s})\ , \qquad \forall\ s\ . \tag{2.6}$$

Allora

$$\sum_{r=1}^{k_1} a_r \mu(A_r) \ = \ \sum_{r=1}^{k_1} a_r \sum_{s=1}^{k_2} \mu(E_{r,s}) \ = \ \sum_{r=1}^{k_1} \sum_{s=1}^{k_2} a_r \mu(E_{r,s})\ , \tag{2.7}$$

$$\sum_{s=1}^{k_2} b_s \mu(B_s) \ = \ \sum_{s=1}^{k_2} b_s \sum_{r=1}^{k_1} \mu(E_{r,s}) \ = \ \sum_{s=1}^{k_2} \sum_{r=1}^{k_1} b_s \mu(E_{r,s})\ . \tag{2.8}$$

Affermiamo che, essendo $\varphi(x) = \psi(x) \ \ \forall\ x \in X$, risulta che

$$a_r \mu(E_{r,s}) = b_s \mu(E_{r,s})\ , \qquad \forall\ r, \forall\ s\ . \tag{2.9}$$

Se $\mu(E_{r,s}) = 0$, allora (2.9) è vera.
Se $\mu(E_{r,s}) > 0$, allora $\exists\ x \in E_{r,s} = A_r \cap B_s$. Ora

$$a_r \ = \ a_r 1_{A_r}(x) \ = \ \varphi(x) \ = \ \psi(x) \ = \ b_s 1_{B_s}(x) \ = \ b_s\ , \tag{2.10}$$

dunque $a_r = b_s$ e vale (2.9). Allora, mettendo insieme (2.7), (2.8) e (2.9) si ha la tesi. $\square$

Vediamo quali sono le principali proprietà dell'integrale di funzioni semplici.

Nota 2.1.3. *Per ogni* $\varphi, \psi \in \mathscr{S}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ *valgono:*

1. $\varphi + \psi \in \mathscr{S}$ *e* $\int_X (\varphi + \psi)\ \mathrm{d}\mu = \int_X \varphi\ \mathrm{d}\mu + \int_X \psi\ \mathrm{d}\mu$;
2. $\alpha\varphi \in \mathscr{S}$ *e* $\int_X (\alpha\varphi)\ \mathrm{d}\mu = \alpha \int_X \varphi\ \mathrm{d}\mu$;
3. $\varphi \wedge 0 \in \mathscr{S}$ *e* $\varphi \vee 0 \in \mathscr{S}$;
4. *Proprietà di monotonia*

   $\forall\ x \in X \quad \varphi(x) \leq \psi(x) \quad \Rightarrow \quad \int_X \varphi\ \mathrm{d}\mu \leq \int_X \psi\ \mathrm{d}\mu$.

Dimostrazione:

Per la nota 2.1.1

$$\varphi = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i 1_{E_i}\ , \quad \psi = \sum_{i=1}^{k} \nu_i 1_{E_i}\ ,$$

con $E_1, \ldots, E_k$ partizione μ-misurabile di X, $\lambda_1, \ldots, \lambda_k, \nu_1, \ldots, \nu_k \in \mathbb{R}$.

1. $\varphi(x) + \psi(x) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i 1_{E_i}(x) + \sum_{i=1}^{k} \nu_i 1_{E_i}(x) = \sum_{i=1}^{k} (\lambda_i + \nu_i)\, 1_{E_i}(x)$. Allora $\varphi + \psi$ è una funzione semplice e

$$\begin{aligned} \int_X (\varphi + \psi)\ \mathrm{d}\mu &= \sum_{i=1}^{k} (\lambda_i + \nu_i)\, \mu(E_i) = \\ &= \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mu(E_i) + \sum_{i=1}^{k} \nu_i \mu(E_i) = \\ &= \int_X \varphi\ \mathrm{d}\mu + \int_X \psi\ \mathrm{d}\mu\ . \end{aligned} \tag{2.11}$$

2. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Si ha che $\alpha\varphi(x) = \alpha \sum_{i=1}^{k} \lambda_i 1_{E_i}(x) = \sum_{i=1}^{k} (\alpha\lambda_i)\, 1_{E_i}(x)$. Quindi $\alpha\varphi$ è una funzione semplice e

$$\int_X (\alpha\varphi)\ \mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^{k} (\alpha\lambda_i)\, \mu(E_i) = \alpha \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mu(E_i) = = \alpha \int_X \varphi\ \mathrm{d}\mu\ . \tag{2.12}$$

3. Osserviamo che $\forall\ x \in X\ \ \exists\ !\ r \in \{1, \dots, k\}$ tale che $x \in E_r$ e $x \notin E_i$, $\forall\ i \neq r$. Allora $\varphi(x) = \lambda_r$.
   Quindi $\varphi(x) \vee 0 = \lambda_r \vee 0$, $\varphi(x) \wedge 0 = \lambda_r \wedge 0$; allora, poiché $x \notin E_i$ per $i \neq r$, si ha

$$\varphi(x) \vee 0 = \sum_{i=1}^{k} (\lambda_i \vee 0)\, 1_{E_i}(x)\ , \quad \varphi(x) \wedge 0 = \sum_{i=1}^{k} (\lambda_i \wedge 0)\, 1_{E_i}(x)\ . \tag{2.13}$$

   Dunque $\varphi \vee 0$ e $\varphi \wedge 0$ sono funzioni semplici.

4. Dimostro che, se $\varphi \leq \psi$, allora

$$\lambda_i \mu(E_i)\ \leq\ \nu_i \mu(E_i) \qquad \forall\ i = 1, \dots, k\ . \tag{2.14}$$

   Infatti, se $\mu(E_i) = 0$, allora (2.14) è vera.
   Se $\mu(E_i) > 0$, allora $\exists\ x \in E_i$, quindi

$$\lambda_i\ =\ \varphi(x)\ \leq\ \psi(x)\ =\ \nu_i\ ,$$

   dunque (2.14) è vera.
   In virtù della (2.14) si ha

$$\int_X \varphi\ \mathrm{d}\mu\ =\ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mu(E_i)\ \leq\ \sum_{i=1}^{k} \nu_i \mu(E_i)\ =\ \int_X \psi\ \mathrm{d}\mu\ . \tag{2.15}$$

□

2.2 Funzioni limitate

Generalizziamo la definizione di integrale ad una classe di funzioni più ampia. Consideriamo una funzione $f : X \to \mathbb{R}$ limitata; vogliamo costruire il suo integrale tramite approssimazione di funzioni semplici.

Definiamo l'insieme delle funzioni semplici maggioranti f

$$\mathscr{S}^+(f) = \{ \varphi \in \mathscr{S} : f(x) \leq \varphi(x) \ \ \forall \, x \in X\} \tag{2.16}$$

e l'insieme delle funzioni semplici minoranti f

$$\mathscr{S}^-(f) = \{ \psi \in \mathscr{S} : f(x) \geq \psi(x) \ \ \forall \, x \in X\} \ . \tag{2.17}$$

Osserviamo che entrambi sono degli insiemi non vuoti. Infatti, posto

$$m = \inf_X f \qquad \text{e} \qquad M = \sup_X f \ , \tag{2.18}$$

poiché f è una funzione limitata, m ed M sono dei numeri reali e risulta $m1_X \in \mathscr{S}^-(f)$, $M1_X \in \mathscr{S}^+(f)$.
Facciamo le seguenti considerazioni:
$\forall \, \psi \in \mathscr{S}^-(f)$ e $\forall \, \varphi \in \mathscr{S}^+(f)$ si ha che

$$\psi \leq f \leq \varphi \quad \text{quindi} \quad \psi \leq \varphi \ ; \tag{2.19}$$

dunque, per la proprietà di monotonia dell'integrale di funzioni semplici

$$\int_X \psi \ \mathrm{d}\mu \leq \int_X \varphi \ \mathrm{d}\mu \ . \tag{2.20}$$

Fissiamo una funzione semplice $\varphi \in \mathscr{S}^+(f)$; allora

$$\sup_{\psi \in \mathscr{S}^-(f)} \int_X \psi \ \mathrm{d}\mu \leq \int_X \varphi \ \mathrm{d}\mu \tag{2.21}$$

e per definizione di m

$$m\mu(X) \ = \ \int_X m1_X \ \mathrm{d}\mu \ \leq \ \sup_{\psi \in \mathscr{S}^-(f)} \int_X \psi \ \mathrm{d}\mu \ . \tag{2.22}$$

D'altra parte, passando all'estremo inferiore su tutte le funzioni semplici maggioranti f, si ha la seguente disuguaglianza:

$$\sup_{\psi \in \mathscr{S}^-(f)} \int_X \psi \ \mathrm{d}\mu \quad \leq \quad \inf_{\varphi \in \mathscr{S}^+(f)} \int_X \varphi \ \mathrm{d}\mu \tag{2.23}$$

e per definizione di M risulta che

$$\inf_{\varphi \in \mathscr{S}^+(f)} \int_X \varphi \, \mathrm{d}\mu \leq \int_X M 1_X \, \mathrm{d}\mu \; = \; M\mu(X) \; . \tag{2.24}$$

In definitiva, in virtù di (2.22), (2.23) e (2.24), risulta

$$-\infty \; < \; m\mu(X) \; \leq \; \sup_{\psi \in \mathscr{S}^-(f)} \int_X \psi \, \mathrm{d}\mu \; \leq \; \inf_{\varphi \in \mathscr{S}^+(f)} \int_X \varphi \, \mathrm{d}\mu \; \leq \; M\mu(X) \; < \; +\infty \, . \tag{2.25}$$

A questo punto, possiamo dare la seguente

Definizione 2.2.1. *Una funzione $f : X \to \mathbb{R}$ limitata si dice* **μ-integrabile** *se*

$$\sup_{\psi \in \mathscr{S}^-(f)} \int_X \psi \, \mathrm{d}\mu = \inf_{\varphi \in \mathscr{S}^+(f)} \int_X \varphi \, \mathrm{d}\mu = I$$

e si pone

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu = I \; .$$

Osservazione 2.2.1. *Se φ è una funzione semplice allora essa è limitata.*

Infatti φ essendo semplice, assume su X solo k valori reali; siamo essi $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$. Detti $m = \min\{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$ e $M = \max\{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$, risulta che

$$\forall \;\; x \in X \;\; \exists \;\; i \in \{1, \ldots, k\} \;\; \text{tale che} \;\; \varphi(x) = \lambda_i \;\; \in [m, M] \; .$$

Dunque φ è limitata.

Nota 2.2.1. *Se $f : X \to \mathbb{R}$ è una funzione semplice, allora essa è μ-integrabile ed inoltre il suo integrale come funzione semplice coincide con il suo integrale di funzione μ-integrabile.*

Dimostrazione:

Essendo f una funzione semplice risulta

$$f = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i 1_{E_i} \tag{2.26}$$

$$\text{e} \qquad \int_X f \, \mathrm{d}\mu \; = \; \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mu(E_i) \; , \tag{2.27}$$

con $E_1, \ldots, E_k$ partizione μ-misurabile di X e $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$.
Sia $\varphi \in \mathscr{S}^+(f)$, allora $\forall\ x \in X \quad f(x) \leq \varphi(x)$ e inoltre

$$\int_X f \ \mathrm{d}\mu \ \leq \ \int_X \varphi \ \mathrm{d}\mu \ ; \tag{2.28}$$

ma $f \in \mathscr{S}^+(f)$, allora

$$\int_X f \ \mathrm{d}\mu \ = \inf_{\varphi \in \mathscr{S}^+(f)} \int_X \varphi \ \mathrm{d}\mu \ . \tag{2.29}$$

Per una generica $\psi \in \mathscr{S}^-(f)$, il discorso è analogo: $\psi(x) \leq f(x) \quad \forall\ x \in X$, quindi

$$\int_X \psi \ \mathrm{d}\mu \ \leq \ \int_X f \ \mathrm{d}\mu \ ; \tag{2.30}$$

ma $f \in \mathscr{S}^-(f)$, dunque

$$\int_X f \ \mathrm{d}\mu \ = \sup_{\psi \in \mathscr{S}^-(f)} \int_X \psi \ \mathrm{d}\mu \ . \tag{2.31}$$

Allora

$$\int_X f \ \mathrm{d}\mu = \sup_{\psi \in \mathscr{S}^-(f)} \int_X \psi \ \mathrm{d}\mu = \inf_{\varphi \in \mathscr{S}^+(f)} \int_X \varphi \ \mathrm{d}\mu \ , \tag{2.32}$$

cioè f è μ-integrabile e le due espressioni per il suo integrale su X rispetto alla misura μ coincidono. $\square$

Esempio 2.2.1. *Sia dato un insieme X e sia μ la misura di Dirac concentrata nel punto $x_0 \in X$. Allora sono valide le seguenti affermazioni:*

1. $\varphi \in \mathscr{S} \quad \Rightarrow \quad \int_X \varphi \ \mathrm{d}\mu = \varphi(x_0)$ *;*
2. $f : X \to \mathbb{R}$ *funzione limitata* $\Rightarrow f$ *è μ-integrabile e* $\int_X f \ \mathrm{d}\mu = f(x_0)$ *.*

Vediamo perché.

1. Sappiamo che, rispetto alla misura di Dirac, tutti i sottoinsiemi di X sono misurabili. Dunque considerata $\varphi \in \mathscr{S}$, risulta

$$\varphi = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i 1_{E_i} \ ,$$

con $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ valori reali, $\{E_i\}_{i=1,\ldots,k}$ partizione di X.
Osserviamo che $\exists\,!\ r_0 \in \{1, \ldots, k\}$ tale che $x_0 \in E_{r_0}$ e $x_0 \notin E_i$, $\forall\ i \neq r_0$.
Quindi la misura di Dirac degli E_i sarà

$$\mu(E_i) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = r_0, \\ 0 & \text{se } i \neq r_0 \end{cases}$$

e

$$1_{E_i}(x_0) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = r_0, \\ 0 & \text{se } i \neq r_0 \end{cases}$$

per cui risulta che

$$\varphi(x_0) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i 1_{E_i}(x_0) = \lambda_{r_0} = \lambda_{r_0}\mu(E_{r_0}) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mu(E_i) = \int_X \varphi \ \mathrm{d}\mu \ . \tag{2.33}$$

2. Consideriamo la funzione $f : X \to \mathbb{R}$ limitata, allora

$$m = \inf_X f \ \in \mathbb{R} \qquad \text{e} \qquad M = \sup_X f \ \in \mathbb{R} \ .$$

Sia $\psi \in \mathscr{S}^-(f)$, allora $\forall\ x \in X \ \ \psi(x) \leq f(x)$, in particolare la disuguaglianza è valida in x_0. Essendo ψ una funzione semplice, per il punto 1.

$$\int_X \psi \ \mathrm{d}\mu \ = \ \psi(x_0) \ \leq \ f(x_0) \ ,$$

allora

$$\sup_{\psi \in \mathscr{S}^-(f)} \int_X \psi \ \mathrm{d}\mu \ \leq \ f(x_0) \ .$$

Consideriamo ora la funzione semplice così definita:

$$\overline{\psi} = f(x_0) 1_{\{x_0\}} + m 1_{X \setminus \{x_0\}} \ ;$$

essa è tale che $\forall\ x \neq x_0 \ \ \overline{\psi}(x) = m \leq f(x)$ e $\overline{\psi}(x_0) = f(x_0)$, allora $\overline{\psi}$ è una minorante per la funzione f.
Sempre per il punto 1. risulta

$$\int_X \overline{\psi} \ \mathrm{d}\mu \ = \ \overline{\psi}(x_0) \ = \ f(x_0) \ ,$$

allora si ha che

$$\sup_{\psi \in \mathscr{S}^-(f)} \int_X \psi \, \mathrm{d}\mu = f(x_0) \; . \tag{2.34}$$

Prendiamo ora una qualsiasi funzione semplice φ maggiorante f; allora $\varphi(x) \geq f(x) \;\; \forall \, x \in X$, quindi $\varphi(x_0) \geq f(x_0)$. Dunque

$$\int_X \varphi \, \mathrm{d}\mu \;\; = \;\; \varphi(x_0) \;\; \geq \;\; f(x_0) \; ,$$

per cui

$$\inf_{\varphi \in \mathscr{S}^+(f)} \int_X \varphi \, \mathrm{d}\mu \;\; \geq \;\; f(x_0) \; .$$

Consideriamo una nuova funzione semplice

$$\overline{\varphi} = f(x_0) 1_{\{x_0\}} + M 1_{X \setminus \{x_0\}} \; ,$$

allora $\overline{\varphi}(x) = M \geq f(x) \;\; \forall \, x \neq x_0$, $\overline{\varphi}(x_0) = f(x_0)$ e

$$\int_X \overline{\varphi} \, \mathrm{d}\mu = \overline{\varphi}(x_0) = f(x_0) \; .$$

Dunque vale la relazione

$$\inf_{\varphi \in \mathscr{S}^+(f)} \int_X \varphi \, \mathrm{d}\mu = f(x_0) \; . \tag{2.35}$$

Unendo le due espressioni di $f(x_0)$ in (2.34) e (2.35), risulta la tesi del punto 2. .

Nota 2.2.2. *Sia $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione limitata. Allora f risulta una funzione μ-integrabile se e solo se vale la seguente condizione:*
$\forall \; \varepsilon > 0 \;\; \exists \; \psi_\varepsilon \in \mathscr{S}^-(f), \; \exists \; \varphi_\varepsilon \in \mathscr{S}^+(f)$ tali che

$$\int_X \varphi_\varepsilon \, \mathrm{d}\mu \; - \; \int_X \psi_\varepsilon \, \mathrm{d}\mu \;\; \leq \varepsilon \; .$$

Dimostrazione:

"$\Rightarrow$" : f è μ-integrabile, allora

$$\sup_{\psi \in \mathscr{S}^-(f)} \int_X \psi \, \mathrm{d}\mu \;=\; l \;=\; \inf_{\varphi \in \mathscr{S}^+(f)} \int_X \varphi \, \mathrm{d}\mu \;, \tag{2.36}$$

con $l \in \mathbb{R}$. Per definizione di estremo superiore ed estremo inferiore, risulta che $\forall\, \varepsilon > 0 \; \exists\, \psi_\varepsilon \in \mathscr{S}^-(f)$ e $\exists\, \varphi_\varepsilon \in \mathscr{S}^+(f)$ tali che

$$l - \frac{\varepsilon}{2} \;\leq\; \int_X \psi_\varepsilon \, \mathrm{d}\mu \;\leq\; l \;, \tag{2.37}$$

$$l \;\leq\; \int_X \varphi_\varepsilon \, \mathrm{d}\mu \;\leq\; l + \frac{\varepsilon}{2} \;. \tag{2.38}$$

Si può concludere che vale la seguente disuguaglianza

$$l - \frac{\varepsilon}{2} \;\leq\; \int_X \psi_\varepsilon \, \mathrm{d}\mu \;\leq\; l \;\leq\; \int_X \varphi_\varepsilon \, \mathrm{d}\mu \;\leq\; l + \frac{\varepsilon}{2} \;, \tag{2.39}$$

da cui si ricava che

$$\int_X \varphi_\varepsilon \, \mathrm{d}\mu \;-\; \int_X \psi_\varepsilon \, \mathrm{d}\mu \;\leq\; \Big(l + \frac{\varepsilon}{2}\Big) \;-\; \Big(l - \frac{\varepsilon}{2}\Big) \;=\; \varepsilon \;. \tag{2.40}$$

"$\Leftarrow$" : Poiché f è una funzione limitata e $\mu(X) < +\infty$, esistono

$$\sup_{\psi \in \mathscr{S}^-(f)} \int_X \psi \, \mathrm{d}\mu = l_1 \quad \in \mathbb{R} \;, \tag{2.41}$$

$$\inf_{\varphi \in \mathscr{S}^+(f)} \int_X \varphi \, \mathrm{d}\mu = l_2 \quad \in \mathbb{R} \;, \tag{2.42}$$

con $l_1 \leq l_2$.
Procediamo per assurdo: se f non è μ-integrabile, allora $l_1 < l_2$ e $l_2 - l_1 > 0$; dunque posso prendere il valore $\varepsilon = (l_2 - l_1)/2$.
Per ipotesi $\exists\, \psi_\varepsilon \in \mathscr{S}^-(f)$ e $\exists\, \varphi_\varepsilon \in \mathscr{S}^+(f)$ tali che

$$\int_X \varphi_\varepsilon \, \mathrm{d}\mu \;-\; \int_X \psi_\varepsilon \, \mathrm{d}\mu \;\leq\; \varepsilon \;=\; \frac{l_2 - l_1}{2} \;. \tag{2.43}$$

Per come sono definiti i valori l_1 e l_2 vale l'espressione

$$\int_X \psi_\varepsilon \, \mathrm{d}\mu \;\leq\; l_1 \;<\; l_2 \;\leq\; \int_X \varphi_\varepsilon \, \mathrm{d}\mu \;, \tag{2.44}$$

che unita alla precedente fanno risultare che

$$l_2 - l_1 \;\leq\; \int_X \varphi_\varepsilon \;\mathrm{d}\mu \;-\; \int_X \psi_\varepsilon \;\mathrm{d}\mu \;\leq\; \varepsilon \;=\; \frac{l_2 - l_1}{2} \;, \tag{2.45}$$

da cui si evince l'assurdo

$$0 \;<\; l_2 - l_1 \;\leq\; \frac{l_2 - l_1}{2} \;. \tag{2.46}$$

Dunque f è μ-integrabile.

□

L'integrale di una funzione limitata, per come è stato costruito, eredita le proprietà dell'integrale di funzioni semplici e questo fa sì che l'insieme $\{\; f : \; f$ è μ-integrabile $\}$ risulti essere uno spazio vettoriale sui reali, come affermato sotto.

Nota 2.2.3. *Considerate due funzioni limitate e μ-integrabili $f, g : X \to \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, si ha che le funzioni $f + g$ e αf sono limitate e μ-integrabili; inoltre*

$$\begin{aligned} \int_X (f+g)\;\mathrm{d}\mu \;&= \int_X f\;\mathrm{d}\mu + \int_X g\;\mathrm{d}\mu \;, \\ \int_X (\alpha f)\;\mathrm{d}\mu \;&= \alpha \int_X f\;\mathrm{d}\mu \;. \end{aligned}$$

Dimostrazione:

Le funzioni f e g sono limitate su $\mathbb{R}$ e sono μ-integrabili, allora per la nota 2.2.2 $\forall\, \varepsilon > 0$, $\forall\, h(\varepsilon) > 0$ $\exists\, p_- \in \mathscr{S}^-(f)$, $\exists\, p_+ \in \mathscr{S}^+(f)$, $\exists\, q_- \in \mathscr{S}^-(g)$ e $\exists\, q_+ \in \mathscr{S}^+(g)$ tali che

$$\int_X p_+ \;\mathrm{d}\mu \;-\; \int_X p_- \;\mathrm{d}\mu \;\leq\; h(\varepsilon) \;, \tag{2.47}$$

$$\int_X q_+ \;\mathrm{d}\mu \;-\; \int_X q_- \;\mathrm{d}\mu \;\leq\; h(\varepsilon) \;. \tag{2.48}$$

Inoltre risultano valide le seguenti relazioni:

$$p_-(x) \;\leq\; f(x) \;\leq\; p_+(x) \qquad \forall\, x \in X \;, \tag{2.49}$$

$$\int_X p_- \, \mathrm{d}\mu \ \le \ \int_X f \, \mathrm{d}\mu \ \le \ \int_X p_+ \, \mathrm{d}\mu \ , \tag{2.50}$$

$$q_-(x) \ \le \ g(x) \ \le \ q_+(x) \qquad \forall \, x \in X \ , \tag{2.51}$$

$$\int_X q_- \, \mathrm{d}\mu \ \le \ \int_X g \, \mathrm{d}\mu \ \le \ \int_X q_+ \, \mathrm{d}\mu \ . \tag{2.52}$$

Sommiamo tra loro le (2.49) e (2.51):

$$p_-(x) + q_-(x) \ \le \ f(x) + g(x) \ \le \ p_+(x) + q_+(x) \quad \forall \, x \in X \ , \tag{2.53}$$

dunque per la nota 2.1.3 $p_- + q_- \in \mathscr{S}^-(f+g)$ e $p_+ + q_+ \in \mathscr{S}^+(f+g)$. Ora $p_- + q_-$, $p_+ + q_+ \in \mathscr{S}$, quindi sono limitate, dunque anche $f+g$ è limitata in virtù della (2.53). Applicando le proprietà di linearità dell'integrale di funzioni semplici e (2.47), (2.48), risulta che

$$\begin{aligned} &\int_X (p_+ + q_+) \ \mathrm{d}\mu \ - \ \int_X (p_- + q_-) \ \mathrm{d}\mu \ = \\ &= \ \int_X p_+ \, \mathrm{d}\mu \ + \ \int_X q_+ \, \mathrm{d}\mu \ - \ \int_X p_- \, \mathrm{d}\mu \ - \ \int_X q_- \, \mathrm{d}\mu \ \le \ 2h(\varepsilon) \ . \end{aligned} \tag{2.54}$$

Se scegliamo $h(\varepsilon)$ tale che

$$h(\varepsilon) \le \frac{\varepsilon}{2} \ , \tag{2.55}$$

per la funzione $f+g$ sono valide le ipotesi della nota 2.2.2, per cui essa è μ-integrabile e, per definizione, valgono le disuguaglianze

$$\int_X (p_- + q_-) \ \mathrm{d}\mu \ \le \ \int_X (f+g) \ \mathrm{d}\mu \ \le \ \int_X (p_+ + q_+) \ \mathrm{d}\mu \ . \tag{2.56}$$

Adesso sommiamo membro a membro la (2.50) e la (2.52):

$$\int_X p_- \, \mathrm{d}\mu + \int_X q_- \, \mathrm{d}\mu \ \le \ \int_X f \, \mathrm{d}\mu + \int_X g \, \mathrm{d}\mu \ \le \ \int_X p_+ \, \mathrm{d}\mu + \int_X q_+ \, \mathrm{d}\mu \ . \tag{2.57}$$

Per la linearità dell'integrale delle funzioni semplici, i termini di sinistra nelle (2.56) e (2.57) sono uguali; lo stesso accade ai termini di destra. Allora

$$\begin{aligned} 0 \ &\le \ \left| \ \int_X (f+g) \ \mathrm{d}\mu \ - \ \left[\int_X f \, \mathrm{d}\mu \ + \ \int_X g \, \mathrm{d}\mu \right] \ \right| \\ &\le \ \int_X (p_+ + q_+) \ \mathrm{d}\mu \ - \ \int_X (p_- + q_-) \ \mathrm{d}\mu \quad \le \ \varepsilon \ ; \end{aligned}$$

dunque, $\forall\ \varepsilon > 0$ risulta

$$0 \ \leq \ \left| \ \int_X (f+g)\ \mathrm{d}\mu \ - \ \left[\int_X f\ \mathrm{d}\mu \ + \ \int_X g\ \mathrm{d}\mu\right] \ \right| \ \leq \ \varepsilon \ ;$$

allora, passando al limite per $\varepsilon \longrightarrow 0^+$, si conclude che

$$\int_X (f+g)\ \mathrm{d}\mu \ = \ \int_X f\ \mathrm{d}\mu \ + \ \int_X g\ \mathrm{d}\mu \ . \tag{2.58}$$

Adesso vogliamo dimostrare che αf è una funzione μ-integrabile e che vale la relazione enunciata per il calcolo del suo integrale.
Distinguiamo i due casi possibili.

1. $\alpha \geq 0$:
   Moltiplicando la (2.49) e la (2.47) per α si ha

   $$\alpha p_-(x) \ \leq \ \alpha f(x) \ \leq \ \alpha p_+(x) \qquad \forall\ x \in X \ , \tag{2.59}$$

   $$\alpha \int_X p_+\ \mathrm{d}\mu \ - \ \alpha \int_X p_-\ \mathrm{d}\mu \ \leq \ \alpha h(\varepsilon) \ . \tag{2.60}$$

   Essendo p_- e p_+ funzioni semplici, possiamo applicare la nota 2.1.3, per cui

   $$\alpha p_- \in \mathscr{S}^-(\alpha f) \ \text{ e } \ \alpha p_+ \in \mathscr{S}^+(\alpha f) \ . \tag{2.61}$$

   Ora, poiché αp_- , $\alpha p_+ \in \mathscr{S}$, esse sono limitate, quindi per la (2.59) αf è pure limitata. Inoltre, per la linearità dell'integrale delle funzioni semplici, usando la (2.60) si ha

   $$\int_X (\alpha p_+)\ \mathrm{d}\mu \ - \int_X (\alpha p_-)\ \mathrm{d}\mu \ = \ \alpha \int_X p_+\ \mathrm{d}\mu \ - \alpha \int_X p_-\ \mathrm{d}\mu \ \leq \ \alpha h(\varepsilon) \ .$$

   Se scegliamo

   $$h(\varepsilon) \leq \frac{\varepsilon}{|\alpha| + 1} \ , \tag{2.62}$$

   allora $\alpha h(\varepsilon) \leq \varepsilon$, per cui si conclude che αf è una funzione μ-integrabile. Quindi è valido affermare, per la (2.59) e per definizione, che

   $$\int_X \alpha p_-\ \mathrm{d}\mu \ \leq \ \int_X \alpha f\ \mathrm{d}\mu \ \leq \ \int_X \alpha p_+\ \mathrm{d}\mu \ ; \tag{2.63}$$

d'altra parte moltiplicando per $\alpha \geq 0$ la (2.50)

$$\alpha \int_X p_- \, \mathrm{d}\mu \;\leq\; \alpha \int_X f \, \mathrm{d}\mu \;\leq\; \alpha \int_X p_+ \, \mathrm{d}\mu \; . \tag{2.64}$$

Per la linearità dell'integrale delle funzioni semplici, i termini di sinistra nelle (2.63) e (2.64) sono uguali; lo stesso accade ai termini di destra. Allora

$$\begin{aligned} 0 \;&\leq\; \left| \int_X (\alpha f) \, \mathrm{d}\mu \;-\; \alpha \int_X f \, \mathrm{d}\mu \right| \\ &\leq\; \int_X (\alpha p_+) \, \mathrm{d}\mu \;-\; \int_X (\alpha p_-) \, \mathrm{d}\mu \;\leq\; \varepsilon \; ; \end{aligned}$$

dunque, $\forall \, \varepsilon > 0$ risulta

$$0 \;\leq\; \left| \int_X (\alpha f) \, \mathrm{d}\mu \;-\; \alpha \int_X f \, \mathrm{d}\mu \right| \;\leq\; \varepsilon \; ,$$

allora, passando al limite per $\varepsilon \longrightarrow 0^+$, si conclude che

$$\int_X (\alpha f) \, \mathrm{d}\mu \;=\; \alpha \int_X f \, \mathrm{d}\mu \; . \tag{2.65}$$

2. $\alpha < 0$:
   Moltiplicando la (2.49) e la (2.47) per α si ha

$$\alpha p_+(x) \;\leq\; \alpha f(x) \;\leq\; \alpha p_-(x) \qquad \forall \, x \in X \; , \tag{2.66}$$

$$\alpha \int_X p_- \, \mathrm{d}\mu \;-\; \alpha \int_X p_+ \, \mathrm{d}\mu \;\leq\; |\alpha| \, h(\varepsilon) \; . \tag{2.67}$$

   Di nuovo si risulta che

$$\alpha p_- \in \mathscr{S}^+(\alpha f) \;\text{ e }\; \alpha p_+ \in \mathscr{S}^-(\alpha f) \; . \tag{2.68}$$

   Ora αp_- , $\alpha p_+ \in \mathscr{S}$, dunque sono limitate, allora in virtù della (2.66) anche αf è limitata. Inoltre, per la linearità dell'integrale delle funzioni semplici, usando la (2.67) si ha

$$\int_X (\alpha p_-) \, \mathrm{d}\mu - \int_X (\alpha p_+) \, \mathrm{d}\mu \;=\; \alpha \int_X p_- \, \mathrm{d}\mu \;-\; \alpha \int_X p_+ \, \mathrm{d}\mu \;\leq\; |\alpha| \, h(\varepsilon) \, .$$

Se scegliamo

$$h(\varepsilon) \leq \frac{\varepsilon}{|\alpha| + 1} \ ,$$

allora $\alpha h(\varepsilon) \leq \varepsilon$, dunque αf è una funzione μ-integrabile e, usando la (2.66) insieme alla definizione,

$$\int_X \alpha p_+ \ \mathrm{d}\mu \ \leq \ \int_X \alpha f \ \mathrm{d}\mu \ \leq \ \int_X \alpha p_- \ \mathrm{d}\mu \ . \tag{2.69}$$

Adesso moltiplichiamo la (2.50) per α ed otteniamo

$$\alpha \ \int_X p_+ \ \mathrm{d}\mu \ \leq \ \alpha \ \int_X f \ \mathrm{d}\mu \ \leq \ \alpha \ \int_X p_- \ \mathrm{d}\mu \ . \tag{2.70}$$

Per la linearità dell'integrale delle funzioni semplici, i termini di sinistra nelle (2.69) e (2.70) sono uguali; lo stesso accade ai termini di destra. Allora

$$\begin{aligned} 0 \ &\leq \ \left| \ \int_X (\alpha f) \ \mathrm{d}\mu \ - \ \alpha \ \int_X f \ \mathrm{d}\mu \ \right| \\ &\leq \ \int_X (\alpha p_-) \ \mathrm{d}\mu \ - \ \int_X (\alpha p_+) \ \mathrm{d}\mu \ \leq \ \varepsilon \ , \end{aligned}$$

quindi, $\forall \ \varepsilon > 0$ risulta

$$0 \ \leq \ \left| \ \int_X (\alpha f) \ \mathrm{d}\mu \ - \ \alpha \ \int_X f \ \mathrm{d}\mu \ \right| \ \leq \ \varepsilon \ .$$

Passando al limite per $\varepsilon \longrightarrow 0^+$ si ha

$$\int_X (\alpha f) \ \mathrm{d}\mu \ = \ \alpha \ \int_X f \ \mathrm{d}\mu \ , \tag{2.71}$$

anche con $\alpha < 0$.

Concludiamo la dimostrazione specificando quale sia il valore più opportuno per la costante positiva $h(\varepsilon)$. Poiché su essa devono essere contemporaneamente verificate le condizioni poste:

$$0 \ < \ h(\varepsilon) \ \leq \ \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{e} \qquad 0 \ < \ h(\varepsilon) \ \leq \ \frac{\varepsilon}{|\alpha| + 1} \ ,$$

poiché

$$\frac{\varepsilon}{2 + |\alpha|} \ \leq \ \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{e} \qquad \frac{\varepsilon}{2 + |\alpha|} \ \leq \ \frac{\varepsilon}{1 + |\alpha|} \ ,$$

basta prendere $h(\varepsilon) = \varepsilon/(2+|\alpha|)$, valore utile in entrambe le parti della prova. $\square$

Nota 2.2.4. *Considerati $a, b \in \mathbb{R}$, con $a \leq b$, allora sono valide le seguenti affermazioni:*

1. $a \wedge 0 \ \leq b \ \wedge 0$;
2. $a \vee 0 \ \leq b \ \vee 0$;
3. $(b \wedge 0) - (a \wedge 0) \ \leq \ b - a$;
4. $(b \vee 0) - (a \vee 0) \ \leq \ b - a$.

Dimostrazione:

Distinguiamo quattro situazioni

i) $a \geq 0$, $b \geq 0$:

$a \wedge 0 = 0$ e $b \wedge 0 = 0$, allora la 1. è vera e anche la 3. è vera.

$a \vee 0 = a$ e $b \vee 0 = b$, allora la 2. è vera e anche la 4. è vera.

ii) $a < 0$, $b \geq 0$:

$a \wedge 0 = a$ e $b \wedge 0 = 0$, allora la 1. è vera;

per quanto riguarda la 3. risulta $0 - a \leq b - a$, quindi essa è verificata.

$a \vee 0 = 0$ e $b \vee 0 = b$, allora la 2. è vera;

per quanto riguarda la 4. risulta $b - 0 \leq b - a$, quindi essa è verificata.

iii) $a \geq 0$, $b < 0$:
questa è una situazione che non si può presentare perché, per ipotesi, $a \leq b$.

iv) $a < 0$, $b < 0$:

$a \wedge 0 = a$ e $b \wedge 0 = b$; allora per ipotesi risulta verificata la 1., mentre la 3. è valida poiché si ha $b - a \leq b - a$.

$a \vee 0 = 0$ e $b \vee 0 = 0$, allora la 2. è valida perché si ha $0 \leq 0$, mentre la 4. è verificata in virtù della relazione $0 \leq b - a$, vera per ipotesi.

□

Nota 2.2.5. *Sia data una funzione $f : X \to \mathbb{R}$ limitata e μ-integrabile. Allora $f \vee 0$ e $f \wedge 0$ risultano funzioni limitate e μ-integrabili.*

Dimostrazione:
Poiché f è μ-integrabile possiamo applicare la nota 2.2.2: $\forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists\ \psi_\varepsilon \in \mathscr{S}^-(f)$, $\exists\ \varphi_\varepsilon \in \mathscr{S}^+(f)$ tali che

$$\int_X \varphi_\varepsilon \,\mathrm{d}\mu \ - \ \int_X \psi_\varepsilon \,\mathrm{d}\mu \ \leq \varepsilon \ , \tag{2.72}$$

mentre per definizione risulta che

$$\psi_\varepsilon(x) \ \leq \ f(x) \ \leq \ \varphi_\varepsilon(x) \ , \qquad \forall\ x \in X \ . \tag{2.73}$$

Essendo φ_ε, $\psi_\varepsilon \in \mathscr{S}$, esiste una partizione μ-misurabile $\{E_i\}_{i=1,\ldots,n}$ di X per cui

$$\psi_\varepsilon \ = \ \sum_{i=1}^{n} \nu_i 1_{E_i} \qquad \text{e} \qquad \varphi_\varepsilon \ = \ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i 1_{E_i} \ , \tag{2.74}$$

con $\nu_1, \ldots, \nu_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, mentre il loro integrale sarà dato dai valori

$$\int_X \psi_\varepsilon \,\mathrm{d}\mu \ = \ \sum_{i=1}^{n} \nu_i \mu(E_i) \ , \tag{2.75}$$

$$\int_X \varphi_\varepsilon \,\mathrm{d}\mu \ = \ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mu(E_i) \ . \tag{2.76}$$

Affermiamo che

$$\mu(E_i) \ > \ 0 \qquad \Rightarrow \qquad \nu_i \ \leq \ \lambda_i \ . \tag{2.77}$$

Infatti $\exists\ x \in E_i$ e $x \notin E_j,\ \forall\ j \neq i$; inoltre

$$\psi_\varepsilon(x) \ = \ \nu_i \qquad \text{e} \qquad \varphi_\varepsilon(x) \ = \ \lambda_i \ . \tag{2.78}$$

Unendo le relazioni (2.73) e (2.78), vale che

$$\nu_i \ = \ \psi_\varepsilon(x) \ \leq \ f(x) \ \leq \ \varphi_\varepsilon(x) \ = \ \lambda_i \ ,$$

per cui

$$\nu_i \ \leq \ \lambda_i \tag{2.79}$$

e la (2.77) è vera.
Applichiamo la nota 2.2.4 alla (2.73) e otteniamo

$$\psi_\varepsilon(x) \wedge 0 \ \leq \ f(x) \wedge 0 \ \leq \ \varphi_\varepsilon(x) \wedge 0 \tag{2.80}$$

$$\text{e} \qquad \psi_\varepsilon(x) \vee 0 \ \leq \ f(x) \vee 0 \ \leq \ \varphi_\varepsilon(x) \vee 0 \ . \tag{2.81}$$

Per la nota 2.1.3, le funzioni $\psi_\varepsilon \vee 0$, $\varphi_\varepsilon \vee 0$, $\psi_\varepsilon \wedge 0$ e $\varphi_\varepsilon \wedge 0$ risultano semplici e valendo (2.80) e (2.81) possiamo concludere che

$$\begin{array}{lcl} \psi_\varepsilon \wedge 0 \in \mathscr{S}^-(f \wedge 0) & \text{e} & \varphi_\varepsilon \wedge 0 \in \mathscr{S}^+(f \wedge 0) \ , \\ \psi_\varepsilon \vee 0 \in \mathscr{S}^-(f \vee 0) & \text{e} & \varphi_\varepsilon \vee 0 \in \mathscr{S}^+(f \vee 0) \ . \end{array}$$

Allora $f \wedge 0$ e $f \vee 0$ risultano delle funzioni limitate. Ora, in base alle relazioni (2.74), (2.75) e (2.76) e per definizione si può dire che:

$$\begin{aligned} \psi_\varepsilon \wedge 0 &= \sum_{i=1}^n (\nu_i \wedge 0) 1_{E_i} \ , & \int_X (\psi_\varepsilon \wedge 0) \ \mathrm{d}\mu \ &= \ \sum_{i=1}^n (\nu_i \wedge 0)\mu(E_i) \ ; \\ \psi_\varepsilon \vee 0 &= \sum_{i=1}^n (\nu_i \vee 0) 1_{E_i} \ , & \int_X (\psi_\varepsilon \vee 0) \ \mathrm{d}\mu \ &= \ \sum_{i=1}^n (\nu_i \vee 0)\mu(E_i) \ ; \\ \varphi_\varepsilon \wedge 0 &= \sum_{i=1}^n (\lambda_i \wedge 0) 1_{E_i} \ , & \int_X (\varphi_\varepsilon \wedge 0) \ \mathrm{d}\mu \ &= \ \sum_{i=1}^n (\lambda_i \wedge 0)\mu(E_i) \ ; \\ \varphi_\varepsilon \vee 0 &= \sum_{i=1}^n (\lambda_i \vee 0) 1_{E_i} \ , & \int_X (\varphi_\varepsilon \vee 0) \ \mathrm{d}\mu \ &= \ \sum_{i=1}^n (\lambda_i \vee 0)\mu(E_i) \ . \end{aligned}$$

Facciamo la seguente considerazione:

$$\begin{aligned} \int_X (\varphi_\varepsilon \wedge 0) \ \mathrm{d}\mu \ - \ \int_X (\psi_\varepsilon \wedge 0) \ \mathrm{d}\mu \ &= \ \sum_{i=1}^n (\lambda_i \wedge 0)\mu(E_i) \ - \ \sum_{i=1}^n (\nu_i \wedge 0)\mu(E_i) = \\ &= \ \sum_{i=1}^n \left[(\lambda_i \wedge 0) - (\nu_i \wedge 0) \right] \mu(E_i) \ ; \end{aligned} \tag{2.82}$$

ora, poiché vale la (2.77) e applicando la nota 2.2.4 si ha

$$\mu(E_i) \;>\; 0 \qquad \Rightarrow \qquad (\lambda_i \wedge 0) - (\nu_i \wedge 0) \;\leq\; \lambda_i - \nu_i \;, \tag{2.83}$$

dunque possiamo dire che

$$[(\lambda_i \wedge 0) - (\nu_i \wedge 0)]\,\mu(E_i) \;\leq\; (\lambda_i - \nu_i)\,\mu(E_i) \;, \quad \forall\; i = 1, \ldots, n \tag{2.84}$$

allora

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} [(\lambda_i \wedge 0) - (\nu_i \wedge 0)]\,\mu(E_i) \;&\leq\; \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - \nu_i)\mu(E_i) \;= \\ &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mu(E_i) - \sum_{i=1}^{n} \nu_i \mu(E_i) \;= \\ &= \int_X \varphi_\varepsilon \;\mathrm{d}\mu \;-\; \int_X \psi_\varepsilon \;\mathrm{d}\mu \;, \end{aligned} \tag{2.85}$$

dove l'ultima uguaglianza si ottiene in virtù di (2.75) e (2.76). Unendo le relazioni (2.82), (2.85) con la (2.72) si conclude che

$$\int_X (\varphi_\varepsilon \wedge 0)\;\mathrm{d}\mu \;-\; \int_X (\psi_\varepsilon \wedge 0)\;\mathrm{d}\mu \;\leq\; \varepsilon \;, \tag{2.86}$$

quindi per la nota 2.2.2 la funzione $f \wedge 0$ è μ-integrabile.
Adesso verifichiamo che $f \vee 0$ è una funzione μ-integrabile:

$$\begin{aligned} \int_X (\varphi_\varepsilon \vee 0)\;\mathrm{d}\mu \;-\; \int_X (\psi_\varepsilon \vee 0)\;\mathrm{d}\mu \;&=\; \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i \vee 0)\mu(E_i) \;-\; \sum_{i=1}^{n} (\nu_i \vee 0)\mu(E_i) = \\ &= \sum_{i=1}^{n} [(\lambda_i \vee 0) - (\nu_i \vee 0)]\,\mu(E_i) \;; \end{aligned} \tag{2.87}$$

dunque di nuovo, in virtù della (2.77) e essendo nelle ipotesi per poter applicare la nota 2.2.4, si ha

$$\mu(E_i) \;>\; 0 \qquad \Rightarrow \qquad (\lambda_i \wedge 0) - (\nu_i \wedge 0) \;\leq\; \lambda_i - \nu_i \;, \tag{2.88}$$

per cui

$$[(\lambda_i \wedge 0) - (\nu_i \wedge 0)]\,\mu(E_i) \;\leq\; (\lambda_i - \nu_i)\,\mu(E_i) \;, \quad \forall\; i = 1, \ldots, n \tag{2.89}$$

allora vale la disuguaglianza

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\left[(\lambda_i \wedge 0)-(\nu_i \wedge 0)\right]\mu(E_i) \;&\leq\; \sum_{i=1}^{n}(\lambda_i-\nu_i)\mu(E_i) \;=\\ &=\; \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\mu(E_i)-\sum_{i=1}^{n}\nu_i\mu(E_i) \;=\\ &=\; \int_X \varphi_\varepsilon \,\mathrm{d}\mu \;-\; \int_X \psi_\varepsilon \,\mathrm{d}\mu\;, \end{aligned} \tag{2.90}$$

dove l'ultima uguaglianza si ottiene in virtù di (2.75) e (2.76). Quindi, le relazioni (2.87), (2.90) unite alla (2.72) danno luogo all'espressione

$$\int_X (\varphi_\varepsilon \vee 0)\,\mathrm{d}\mu \;-\; \int_X (\psi_\varepsilon \vee 0)\,\mathrm{d}\mu \;\leq\; \varepsilon\;, \tag{2.91}$$

che permette l'utilizzo della nota 2.2.2 per concludere che effettivamente la funzione $f \vee 0$ è μ-integrabile. □

Risultano valide altre proprietà importanti per la classe delle funzioni μ-integrabili: sono quelle di monotonia e di positività dell'integrale, esplicitate come segue.

Nota 2.2.6. *Siano date due funzioni limitate e μ-integrabili $f, g : X \to \mathbb{R}$. Allora valgono le proprietà:*

1. *se* $g(x) \geq 0,\ \forall\, x \in X$ *allora* $\int_X g\,\mathrm{d}\mu \geq 0$*;*
2. *se* $f(x) \geq g(x),\ \forall\, x \in X$ *allora* $\int_X f\,\mathrm{d}\mu \geq \int_X g\,\mathrm{d}\mu$*;*
3. *la funzione* $|f|$ *è limitata e μ-integrabile; inoltre*

$$\left|\int_X f\,\mathrm{d}\mu\right| \leq \int_X |f|\,\mathrm{d}\mu\;.$$

Dimostrazione:

1. Per ipotesi $g(x) \geq 0, \ \forall\, x \in X$, allora la funzione $01_X \in \mathscr{S}^-(g)$. Poiché g è una funzione μ-integrabile vale che

$$\int_X g \ \mathrm{d}\mu \ = \ \sup_{\psi \in \mathscr{S}^-(g)} \int_X \psi \ \mathrm{d}\mu \ , \tag{2.92}$$

mentre per definizione di estremo superiore

$$\sup_{\psi \in \mathscr{S}^-(g)} \int_X \psi \ \mathrm{d}\mu \ \geq \ \int_X 01_X \ \mathrm{d}\mu \ = \ 0 \ . \tag{2.93}$$

Dunque, unendo (2.92) con (2.93), risulta verificata la proprietà 1. .

2. Per ipotesi $f(x) \geq g(x), \ \forall\, x \in X$, allora $f(x) - g(x) \geq 0$. Per la nota 2.2.3 la funzione $f - g$ è limitata e μ-integrabile e risulta

$$\int_X (f-g) \ \mathrm{d}\mu \ = \ \int_X f \ \mathrm{d}\mu \ - \ \int_X g \ \mathrm{d}\mu \ ; \tag{2.94}$$

inoltre, essa verifica la proprietà 1., ossia

$$\int_X (f-g) \ \mathrm{d}\mu \ \geq \ 0 \ . \tag{2.95}$$

Allora, unendo la relazione (2.94) con la (2.95), la 2. risulta vera.

3. Affermo che

$$|f| \ = \ (f \vee 0) \ - \ (f \wedge 0) \ , \tag{2.96}$$

poiché, dato $a \in \mathbb{R}$ si può sempre scrivere che

$$|a| \ = \ (a \vee 0) \ - \ (a \wedge 0) \ ; \tag{2.97}$$

verifichiamolo.

   (a) Se $a = 0$, la (2.97) è ovvia; infatti
   $|a| \ = \ 0, \quad a \vee 0 \ = \ 0, \quad a \wedge 0 \ = \ 0,$
   per cui $0 = 0$.

   (b) Se $a > 0$, allora
   $|a| \ = \ a, \quad a \vee 0 \ = \ a, \quad a \wedge 0 \ = \ 0,$
   per cui $(a \vee 0) - (a \wedge 0) \ = \ a \ = \ |a|$, ossia la (2.97) è vera.

(c) Se $a < 0$, si ha
$|a| \ = \ -a, \quad a \vee 0 \ = \ 0, \quad a \wedge 0 \ = \ a,$
per cui $(a \vee 0) - (a \wedge 0) \ = \ -a \ = \ |a|$;
quindi la (2.97) è di nuovo valida.

Le funzioni $f \vee 0$, $f \wedge 0$ sono limitate e μ-integrabili,per la nota 2.2.5, come pure la funzione differenza, per la nota 2.2.3, per cui la funzione $|f|$ risulta anch'essa limitata e μ-integrabile.
Ora, osserviamo che $\forall \ x \in X$ vale la relazione

$$- |f(x)| \ \leq \ f(x) \ \leq \ |f(x)| \ ,$$

dalla quale, applicando la proprietà 2., si ottiene

$$\int_X (- |f|) \ \mathrm{d}\mu \ \leq \ \int_X f \ \mathrm{d}\mu \ \leq \ \int_X |f| \ \mathrm{d}\mu \ ; \tag{2.98}$$

per linearità, il membro di sinistra assume la forma

$$\int_X (- |f|) \ \mathrm{d}\mu \ = \ - \ \int_X |f| \ \mathrm{d}\mu \ ,$$

mentre per il membro di destra, visto che $|f| \ \geq \ 0$, applicando la proprietà 1. vale

$$\int_X |f| \ \mathrm{d}\mu \ \geq \ 0 \ . \tag{2.99}$$

Dunque, essendo valide le relazioni (2.98) e (2.99), possiamo applicare la seguente proprietà dei numeri reali:

$$\text{se} \quad - \beta \ \leq \ \alpha \ \leq \ \beta, \ \text{con} \ \ \beta \geq 0, \quad \text{allora} \ \ |\alpha| \ \leq \ \beta \ ,$$

per cui risulta che

$$\left| \int_X f \ \mathrm{d}\mu \right| \leq \ \int_X |f| \ \mathrm{d}\mu \ . \tag{2.100}$$

□

Capitolo 3

Integrazione: seconda parte

Nel secondo capitolo abbiamo introdotto la classe delle funzioni μ-integrabili. È difficile, usando la definizione, riconoscere se una funzione f è μ-integrabile. In questo capitolo troveremo delle sottoclassi di funzioni μ-integrabili: si spera che la verifica dell'appartenenza a tali sottoclassi sia più facile.
Ricordiamo che alla base della nostra trattazione abbiamo:

- un insieme X;
- una misura μ definita su X;
- $\mu(X) < +\infty$;
- la famiglia $\mathcal{M}_\mu(X)$ degli insiemi μ-misurabili.

3.1 Funzioni misurabili

Definizione 3.1.1. *Una generica funzione* $f : X \to \mathbb{R}$ *si dice* **$\boldsymbol{\mu}$-misurabile** *se* $\forall\ A \subset \mathbb{R}$ *aperto risulta che* $f^{-1}(A)$ *è un insieme* μ*-misurabile di* X.

Nota 3.1.1. *Sia dato un insieme* X*, sia data una* σ*-algebra* $S \subset \mathcal{P}(X)$ *e sia data una funzione* $f : X \to \mathbb{R}$ *tale che* $\forall\ A \subset \mathbb{R}$ *aperto risulta che* $f^{-1}(A) \in S$. *Allora* $\forall\ B \subset \mathbb{R}$ *Boreliano risulta che* $f^{-1}(B) \in S$.

Dimostrazione:

Sia $\mathcal{C} = \{C \subset \mathbb{R} \ : \ f^{-1}(C) \in S\}$.

Per l'ipotesi fatta sulla funzione f risulta che $\mathcal{C} \supset \{\text{aperti di } \mathbb{R}\}$, allora per concludere bisogna dimostrare che $\mathcal{C} \supset \mathcal{B}(\mathbb{R})$, la σ-algebra dei Boreliani. Per definizione di $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, basta verificare che $\mathcal{C}$ è una σ-algebra; verifichiamo le proprietà.

1. Visto che S è una σ-algebra allora $X \in S$; dunque si ha che $X = f^{-1}(\mathbb{R}) \in S$, quindi $\mathbb{R} \in \mathcal{C}$.
   Visto che S è una σ-algebra allora $\emptyset \in S$; dunque $\emptyset = f^{-1}(\emptyset) \in S$, quindi $\emptyset \in \mathcal{C}$.

2. Sia $C \in \mathcal{C} \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(C) \in S$.
   $f^{-1}(\mathbb{R}\backslash C) = X \backslash f^{-1}(C) \in S$, poiché S è una σ-algebra.
   Dunque $\mathbb{R}\backslash C \in \mathcal{C}$.

3. Consideriamo la famiglia $\{C_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C} \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(C_i) \in S \;\; \forall\, i$.
   $f^{-1}\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} C_i\right) = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} f^{-1}(C_i) \in S$ poiché S è una σ-algebra.
   Allora $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} C_i \in \mathcal{C}$.

Dunque effettivamente $\mathcal{C}$ è una σ-algebra. □

Nota 3.1.2. *Sia $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione μ-misurabile. Allora f verifica le seguenti proprietà:*

1. *per ogni Boreliano $B \in \mathbb{R}$ risulta che $f^{-1}(B)$ è μ-misurabile;*

2. *se $-\infty < a < b < +\infty$ allora $f^{-1}([a,b))$ è μ-misurabile.*

Dimostrazione:

1. Considerata la famiglia $\mathcal{M}_\mu(X)$ degli insiemi μ-misurabili di X, essendo essa una σ-algebra, posso applicare la nota 3.1.1, per cui la proprietà è banalmente valida.

2. Osserviamo che, se l'intervallo $[a,b) \subset \mathbb{R}$ fosse un Boreliano, allora per il punto precedente $f^{-1}([a,b))$ sarebbe μ-misurabile. Dunque, verifichiamo che $[a,b)$ è Boreliano.
   Risulta che
   $$[a,b) \;=\; \mathbb{R}\backslash\left((-\infty,a) \cup [b,+\infty)\right)\ , \tag{3.1}$$

dove $(-\infty, a)$ è un aperto della retta reale, per cui è un Boreliano; $[b, +\infty) = \mathbb{R}\backslash(-\infty, b)$, per cui, visto che $(-\infty, b) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ e $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ è una σ-algebra, esso è un Boreliano. L'unione di due Boreliani è un Boreliano, quindi $(-\infty, a) \cup [b, +\infty) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$; poiché $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ è chiusa rispetto ai complementari, allora effettivamente l'intervallo $[a, b) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

□

Nota 3.1.3. *Sia data una funzione $f : X \to \mathbb{R}$ limitata e μ-misurabile. Risulta che f è μ-integrabile.*

Dimostrazione:

Visto che f è limitata, posto $m = \inf_X f \in \mathbb{R}$ e $M = \sup_X f \in \mathbb{R}$, possiamo dire che

$$-\infty \ < \ m \ \leq \ f(x) \ \leq \ M \ < \ +\infty \ , \qquad \forall\, x \in X \ . \tag{3.2}$$

Distinguiamo due casi:

1. $\boldsymbol{m = M}$:
   Per la relazione (3.2) possiamo concludere che $f(x) = m1_X(x) \quad \forall\, x \in X$, per cui f è una funzione semplice. Dunque f è μ-integrabile per la nota 2.2.1.

2. $\boldsymbol{m < M}$:
   In virtù della (3.2) risulta che
   $$f(x) \ \in \ [m, M] \ \subset \ [m, M+1) \ . \tag{3.3}$$
   Poniamo $a = M + 1 - m$, dividiamo l'intervallo $[m, M+1)$ in n parti uguali così definite
   $$\left[m + i\frac{a}{n}, m + (i+1)\frac{a}{n}\right) \ , \quad i = 0, \ldots, n-1 \tag{3.4}$$
   e con esse definiamo dei sottoinsiemi di X
   $$E_i \ = \ f^{-1}\left(\left[m + i\frac{a}{n}, m + (i+1)\frac{a}{n}\right)\right) \ , \quad \forall\, i = 0, \ldots, n-1 \ . \tag{3.5}$$

1° Fatto: Affermo che la famiglia $\{E_i\}_{i=0,\dots,n-1}$ è una partizione μ-misurabile di X.
Gli insiemi E_i sono tutti μ-misurabili in virtù della nota 3.1.2, visto che per ipotesi f è μ-misurabile.

a) $\bigcup_{i=0}^{n-1} E_i \ = \ X$

La relazione $\bigcup_{i=0}^{n-1} E_i \ \subset \ X$ è ovvia; verifichiamo l'altra inclusione.
Sia $x \in X$, allora

$$f(x) \ \in \ [m, M+1) \ = \bigcup_{i=0}^{n-1} \Big[m + i\frac{a}{n}, m + (i+1)\frac{a}{n}\Big)$$

$$\Rightarrow \ \exists\, j \in \{0, \dots, n{-}1\} \text{ tale che } f(x) \ \in \ \Big[m + j\frac{a}{n}, m + (j+1)\frac{a}{n}\Big)$$

$$\Rightarrow \ x \ \in \ f^{-1}\left(\Big[m + j\frac{a}{n}, m + (j+1)\frac{a}{n}\Big)\right) \ = \ E_j$$

$$\Rightarrow \ x \ \in \ \bigcup_{i=0}^{n-1} E_i \quad \Rightarrow \quad X \ \subset \ \bigcup_{i=0}^{n-1} E_i \ . \tag{3.6}$$

Abbiamo così dimostrato che

$$X \ \subset \ \bigcup_{i=0}^{n-1} E_i \ , \tag{3.7}$$

dunque il punto *a)* è verificato.

b) Gli E_i sono insieme a due a due disgiunti.

Siano $i, j \in \{0, \dots, n-1\}$ con $i \neq j$; certamente

$$\Big[m + i\frac{a}{n}, m + (i+1)\frac{a}{n}\Big) \ \bigcap \ \Big[m + j\frac{a}{n}, m + (j+1)\frac{a}{n}\Big) \ = \ \emptyset \ , \tag{3.8}$$

infatti se $i < j$ allora $i + 1 \leq j$, poiché $i, j \in \mathbb{Z}$, per cui

$$m + (i+1)\frac{a}{n} \ \leq \ m + j\frac{a}{n} \ . \tag{3.9}$$

Inoltre, dato $t \in [m + i\frac{a}{n}, m + (i+1)\frac{a}{n})$ e dato $s \in [m + j\frac{a}{n}, m + (j+1)\frac{a}{n})$ risulta che

$$t \;<\; m + (i+1)\frac{a}{n} \qquad \text{e} \qquad s \;\geq\; m + j\frac{a}{n} \;; \tag{3.10}$$

allora unendo le relazioni (3.9), (3.10) si deduce che $s > t$, per cui la condizione (3.8) è vera.
Passando alle controimmagini nella (3.8), si ha che

$$f^{-1}\Big([m + i\frac{a}{n}, m + (i+1)\frac{a}{n})\Big) \cap f^{-1}\Big([m + j\frac{a}{n}, m + (j+1)\frac{a}{n})\Big) \;=\; \emptyset\,,$$

ossia che

$$E_i \cap E_j = \emptyset \qquad \forall\; i, j \in \{0, \ldots, n-1\} \tag{3.11}$$

con $i \neq j$. Il punto $b)$ è così verificato.

In definitiva le condizioni verificate in $a)$ e $b)$ fanno concludere che la famiglia $\{E_i\}_{i=0,\ldots,n-1}$ è una partizione μ-misurabile di X.

Adesso definiamo le funzioni

$$\psi_n \;=\; \sum_{i=0}^{n-1} \Big(m + i\frac{a}{n}\Big)\, 1_{E_i} \qquad \text{e} \qquad \varphi_n \;=\; \sum_{i=0}^{n-1} \Big(m + (i+1)\frac{a}{n}\Big)\, 1_{E_i}\;; \tag{3.12}$$

in base alla definizione (2.1.1) esse sono delle funzioni semplici.

2° Fatto: Affermo che $\psi_n \in \mathscr{S}^-(f)$ e $\varphi_n \in \mathscr{S}^+(f)$.
Sia $x \in X$; allora $\exists\; !\; i \in \{0, \ldots, n-1\}$ tale che $x \in E_i$ e ne segue che $f(x) \in [m + i\frac{a}{n}, m + (i+1)\frac{a}{n})$, per definizione della partizione $\{E_i\}_i$. Allora vale che

$$m + i\frac{a}{n} \;\leq\; f(x) \;<\; m + (i+1)\frac{a}{n}\;, \tag{3.13}$$

da cui segue, per le definizioni poste in (3.12), che

$$\psi_n(x) \;\leq\; f(x) \;<\; \varphi_n(x)\;. \tag{3.14}$$

Dunque il 2° fatto risulta vero.

3° Fatto: Affermo che $\forall\; \varepsilon > 0\;\; \exists\; n_\varepsilon :\; \forall\; n \geq n_\varepsilon$ risulta

$$\int_X \varphi_n \,\mathrm{d}\mu \;-\; \int_X \psi_n \,\mathrm{d}\mu \;\leq\; \varepsilon\;.$$

Dalla disuguaglianza in (3.14) e dalle definizioni poste in (3.12) seguono le seguenti relazioni:

$$0 \ < \ \varphi_n(x) - f(x) \ \leq \ \varphi_n(x) - \psi_n(x) \ = \ \frac{a}{n} \ , \tag{3.15}$$

$$0 \ \leq \ f(x) - \psi_n(x) \ \leq \ \varphi_n(x) - \psi_n(x) \ = \ \frac{a}{n} \ . \tag{3.16}$$

Ora:

$$\begin{aligned}
\int_X \varphi_n \, \mathrm{d}\mu \ - \ \int_X \psi_n \, \mathrm{d}\mu \ &= \ \sum_{i=0}^{n-1} \Big(m + (i+1)\frac{a}{n}\Big) \, \mu(E_i) \ - \ \sum_{i=0}^{n-1} \Big(m + i\frac{a}{n}\Big) \, \mu(E_i) \ = \\
&= \ \sum_{i=0}^{n-1} \left[\Big(m + (i+1)\frac{a}{n}\Big) \ - \ \Big(m + i\frac{a}{n}\Big)\right] \mu(E_i) \ = \\
&= \ \sum_{i=0}^{n-1} \frac{a}{n} \ \mu(E_i) \ = \ \frac{a}{n} \ \sum_{i=0}^{n-1} \mu(E_i) \ = \\
&= \ \frac{a}{n} \ \mu \left(\bigcup_{i=0}^{n-1} E_i \right) \ = \ \frac{a}{n} \ \mu(X) \ ;
\end{aligned}$$

ricordando la definizione del valore a, di M e di m si ha che

$$\begin{aligned}
\int_X \varphi_n \, \mathrm{d}\mu \ - \ \int_X \psi_n \, \mathrm{d}\mu \ &= \ \frac{M \ + \ 1 \ - m}{n} \ \mu(X) \ = \\
&= \ \left[\frac{\sup_X f \ + \ 1 \ - \ \inf_X f}{n} \right] \ \mu(X) \ ,
\end{aligned} \tag{3.17}$$

e poiché siamo nell'ipotesi che $\mu(X) < +\infty$ si conclude che

$$\forall \ \varepsilon > 0 \ \ \exists \ n_\varepsilon : \forall \ n \geq n_\varepsilon \ \ \text{si ha} \ \ \int_X \varphi_n \, \mathrm{d}\mu \ - \ \int_X \psi_n \, \mathrm{d}\mu \ \leq \ \varepsilon \ . \tag{3.18}$$

Dunque, il 3° fatto è verificato; esso unito alla nota 2.2.2, fa concludere che la funzione f è μ-integrabile. □

Osservazione 3.1.1. *Dalla dimostrazione della precedente nota si ricavano altre proprietà importanti per le funzioni semplici definite nella relazione (3.12):*

1. *$\psi_n \in \mathscr{S}^-(f)$, $\psi_n \longrightarrow f$ uniformemente in X e*
$$\int_X \psi_n \, \mathrm{d}\mu \longrightarrow \int_X f \, \mathrm{d}\mu \ ;$$
2. *$\varphi_n \in \mathscr{S}^+(f)$, $\varphi_n \longrightarrow f$ uniformemente in X e*
$$\int_X \varphi_n \, \mathrm{d}\mu \longrightarrow \int_X f \, \mathrm{d}\mu \ .$$

Dimostrazione:
Infatti, ripartendo dalle condizioni espresse nella dimostrazione, dalla relazione (3.15) segue immediatamente che

$$0 \ \leq \ \varphi_n(x) \ - \ f(x) \ \leq \ \frac{a}{n} \qquad \forall \, x \in X \ , \tag{3.19}$$

ossia che

$$\varphi_n \ \longrightarrow \ f \tag{3.20}$$

uniformemente in X; mentre dalla relazione (3.16) segue che

$$0 \ \leq \ f(x) \ - \ \psi_n(x) \ \leq \ \frac{a}{n} \qquad \forall \, x \in X \ , \tag{3.21}$$

quindi che

$$\psi_n \ \longrightarrow \ f \tag{3.22}$$

uniformemente in X.
Visto che $\psi_n \in \mathscr{S}^-(f)$ e $\varphi_n \in \mathscr{S}^+(f)$, per definizione risulta che

$$\int_X \psi_n \, \mathrm{d}\mu \ \leq \ \int_X f \, \mathrm{d}\mu \ \leq \int_X \varphi_n \, \mathrm{d}\mu \ , \tag{3.23}$$

in cui il membro di destra e quello di sinistra rappresentano due successioni numeriche.
Ricordiamo una proprietà dei numeri reali: se $l, a_n, b_n \in \mathbb{R}$ tali che

$$\left.\begin{array}{l} a_n \ \leq \ l \ \leq \ b_n \\ b_n \ - \ a_n \ \longrightarrow \ 0 \end{array}\right\} \qquad \Rightarrow \qquad \left\{\begin{array}{l} a_n \ \longrightarrow \ l \\ b_n \ \longrightarrow \ l \end{array}\right. \ .$$

Infatti, dalla 1ª della ipotesi si deduce che

$$0 \ \leq \ l \ - \ a_n \ \leq \ b_n \ - \ a_n \quad \text{e} \quad 0 \ \leq \ b_n \ - \ l \ \leq \ b_n \ - \ a_n \ , \tag{3.24}$$

a cui applicando il limite per $n \longrightarrow \infty$ e la 2ª ipotesi si ha la tesi.
Dunque, utilizzando questa proprietà, considerando come

$$a_n \;=\; \int_X \psi_n \,\mathrm{d}\mu \;, \qquad b_n \;=\; \int_X \varphi_n \,\mathrm{d}\mu \tag{3.25}$$

$$\text{e} \qquad l \;=\; \int_X f \,\mathrm{d}\mu \;, \tag{3.26}$$

concludiamo che

$$\int_X \psi_n \,\mathrm{d}\mu \longrightarrow \int_X f \,\mathrm{d}\mu \tag{3.27}$$

$$\text{e} \qquad \int_X \varphi_n \,\mathrm{d}\mu \longrightarrow \int_X f \,\mathrm{d}\mu \;. \tag{3.28}$$

□

Ora consideriamo uno spazio metrico (X, d), dove X è un insieme e d è una metrica su X.

Definizione 3.1.2. *Una funzione $f : X \to \mathbb{R}$ si dice* ***Boreliana*** *se $\forall\ A \subset \mathbb{R}$ aperto risulta che $f^{-1}(A)$ è un Boreliano.*

Osservazione 3.1.2. *In base alla definizione appena data risulta immediato fare un esempio semplice di funzione Boreliana: le funzioni continue sono delle funzioni Boreliane.*

Nota 3.1.4. *Consideriamo uno spazio metrico (X, d), una misura di Borel μ su X e una funzione Boreliana $f : X \to \mathbb{R}$. Allora f è μ-misurabile.*

Dimostrazione:

Poiché f è Boreliana allora $\forall\ A \subset \mathbb{R}$ aperto si ha che $f^{-1}(A) \in \mathcal{B}(X)$; inoltre per ipotesi sulla misura μ si ha che $\mathcal{B}(X) \subset \mathcal{M}_\mu(X)$. Allora, unendo le due proprietà, per ogni aperto A di $\mathbb{R}$ $f^{-1}(A)$ è un insieme μ-misurabile di X, quindi per definizione f è una funzione μ-misurabile. □

Osservazione 3.1.3. *A questo punto conviene fare un piccolo schema per comprendere e riepilogare i legami esistenti fra le varie funzioni considerate.*

SCHEMA:

(X, d) *spazio metrico,* μ *misura di Borel su* X, $f : X \to \mathbb{R}$ *funzione limitata.*

$$
\begin{array}{lll}
f & \textit{continua} & \\
 & \Downarrow & \textit{osservazione 3.1.2} \\
f & \textit{Boreliana} & \\
 & \Downarrow & \textit{nota 3.1.4} \\
f & \mu\textit{-misurabile} & \\
 & \Downarrow & \textit{nota 3.1.3} \\
f & \mu\textit{-integrabile} &
\end{array}
$$

Questo schema in definitiva indica le condizioni sufficienti per la μ*-integrabilità per una funzione definita e limitata su uno spazio metrico* X*, quando la misura di Borel* μ *è finita.*
Inoltre ricordiamo che dato uno spazio metrico (X, d) *con* X *compatto e data una funzione continua* $f : X \to \mathbb{R}$ *allora* f *ammette un minimo e un massimo in* X*, dunque essa è una funzione limitata in* X*.*

Definizione 3.1.3. *Sia* (X, d) *uno spazio metrico,* D *un sottoinsieme di* X*. Si definisce il* ***diametro*** *di* D *il valore*

$$diam(D) \;=\; \sup\{d(x, y) :\; x, y \in D\} \;.$$

Nota 3.1.5. *Sia* (X, d) *uno spazio metrico e* $D \subset X$*. Allora*

$$diam(D) \;=\; diam(\overline{D}) \;,$$

dove $\overline{D}$ *è la chiusura dell'insieme* D*.*

Dimostrazione:

Risulta

$$D \;\subset\; \overline{D} \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{diam}(D) \;\leq\; \mathrm{diam}(\overline{D}) \;. \tag{3.29}$$

Se $\mathrm{diam}(D) = +\infty$ allora $\mathrm{diam}(\overline{D}) = +\infty$, per cui si ha la tesi.
Se $\mathrm{diam}(D) < +\infty$, per le proprietà della chiusura, dati $\overline{x}, \overline{y} \in \overline{D}$ allora esistono $x_k, y_k \in D$ tali che per $k \longrightarrow \infty$ si ha

$$d(x_k, \overline{x}) \longrightarrow 0 \qquad \text{e} \qquad d(y_k, \overline{y}) \longrightarrow 0 \ . \tag{3.30}$$

Applichiamo la proprietà triangolare della metrica d alla coppia $\overline{x}, \overline{y}$:

$$\begin{aligned} d(\overline{x}, \overline{y}) \ &\leq \ d(\overline{x}, x_k) \ + \ d(x_k, \overline{y}) \ \leq \\ &\leq \ d(\overline{x}, x_k) \ + \ d(x_k, y_k) \ + \ d(x_k, \overline{y}) \ ; \end{aligned} \tag{3.31}$$

ora, poiché $x_k, y_k \in D$ si ha che $d(x_k, y_k) \leq \mathrm{diam}(D)$, per cui riprendendo la disuguaglianza (3.31) si ha

$$d(\overline{x}, \overline{y}) \ \leq \ d(\overline{x}, x_k) \ + \ \mathrm{diam}(D) \ + \ d(x_k, \overline{y}) \ . \tag{3.32}$$

Passando al limite per $k \longrightarrow \infty$ in entrambi i membri della (3.32) e usando le relazioni nella (3.30) si ha

$$d(\overline{x}, \overline{y}) \ \leq \ \mathrm{diam}(D) \ . \tag{3.33}$$

Osserviamo che la stima nella (3.33) è valida $\forall \ \overline{x}, \overline{y} \in \overline{D}$, allora vale che

$$\sup\{d(\overline{x}, \overline{y}) : \ \overline{x}, \overline{y} \in \overline{D}\} \ \leq \ \mathrm{diam}(D) \ . \tag{3.34}$$

Per definizione di diametro

$$\sup\{d(\overline{x}, \overline{y}) : \ \overline{x}, \overline{y} \in \overline{D}\} \ = \ \mathrm{diam}(\overline{D}) \ ,$$

da cui segue che la (3.34) diventa

$$\mathrm{diam}(\overline{D}) \ \leq \ \mathrm{diam}(D) \ . \tag{3.35}$$

Dunque, unendo la relazione (3.29) con la (3.35) si ha la tesi

$$\mathrm{diam}(\overline{D}) \ = \ \mathrm{diam}(D) \ . \tag{3.36}$$

$\square$

Nota 3.1.6. *Sia (X, d) uno spazio metrico compatto. Allora risulta che $\forall\ \delta > 0\ \exists\ k \in \mathbb{N},\ \exists\ A_1, \ldots, A_k$ aperti di X, $\exists\ \tilde{A}_1, \ldots, \tilde{A}_k$ Boreliani di X tali che*

1. *diam$(A_i) \leq\ \delta \quad \forall\ i = 1, \ldots, k$;*
2. *$\tilde{A}_i\ \subset\ A_i$ e diam$(\tilde{A}_i)\ \leq$ diam$(A_i) \quad \forall\ i = 1, \ldots, k$;*
3. *$A_1 \cup \cdots \cup A_k\ =\ X$ e $\tilde{A}_1 \cup \cdots \cup \tilde{A}_k\ =\ X$;*
4. *$\forall\ r \neq s \quad \Rightarrow \quad \tilde{A}_r \cap \tilde{A}_s\ =\ \emptyset$.*

Dimostrazione:

Per ogni $x \in X$ consideriamo una palla aperta $B(x, \delta/2)$. Siano $y, z \in B(x, \delta/2)$, allora per la proprietà triangolare della metrica d risulta

$$d(y, z)\ \leq\ d(y, x)\ +\ d(x, z)\ <\ \frac{\delta}{2}\ +\ \frac{\delta}{2}\ =\ \delta\ ; \tag{3.37}$$

allora $d(y, z) < \delta$, da cui segue che

$$\sup\{\ d(y, z) :\ y, z \in B(x, \delta/2)\ \}\ \leq\ \delta\ . \tag{3.38}$$

Per definizione di diametro

$$\sup\{\ d(y, z) :\ y, z \in B(x, \delta/2)\ \}\ =\ \mathrm{diam}\left(B\left(x, \frac{\delta}{2}\right)\right)$$

e quindi la (3.38) diventa

$$\mathrm{diam}\left(B\left(x, \frac{\delta}{2}\right)\right)\ \leq\ \delta\ . \tag{3.39}$$

Osserviamo che

$$\bigcup_{x \in X} B\left(x, \frac{\delta}{2}\right)\ =\ X\ ,$$

quindi $\{\ B(x, \delta/2)\}_{x \in X}$ è un ricoprimento aperto per X; poiché X è un compatto per ipotesi, esso ammette un sottoricoprimento finito, ossia esistono $x_1, \ldots, x_k \in X$ tali che

$$\bigcup_{i=1}^{k} B\left(x_i, \frac{\delta}{2}\right)\ =\ X\ . \tag{3.40}$$

Allora chiamiamo

$$A_i \; = \; B\left(x_i, \frac{\delta}{2}\right) \; , \tag{3.41}$$

per cui essi risultano degli aperti di X; inoltre vista la (3.39) si ha che

$$\mathrm{diam}(A_i) \; \leq \; \delta \qquad \forall \; i = 1, \ldots, k \; , \tag{3.42}$$

quindi la proprietà 1. è vera, e vista la (3.40) si ha

$$\bigcup_{i=1}^{k} A_i \; = \; X \; , \tag{3.43}$$

quindi la prima parte della proprietà 3. è vera.
Ora, se $k = 1$, prendo $\tilde{A}_1 = A_1$ e si conclude la dimostrazione, in quanto il resto delle proprietà risultano ovvie; mentre per $k \geq 2$ prendo

$$\tilde{A}_1 \; = \; A_1 \quad \text{e} \quad \tilde{A}_j \; = \; A_j \backslash \bigcup_{i=1}^{j-1} A_i \qquad \text{per } j = 2, \ldots, k \; . \tag{3.44}$$

Osserviamo che $\bigcup_{i=1}^{j-1} A_i$ è un aperto di X perché unione finita di aperti, quindi è un Boreliano; allora anche $X \backslash \bigcup_{i=1}^{j-1} A_i$ è un Boreliano. Inoltre vale che

$$\tilde{A}_j \; = \; A_j \bigcap \left[X \backslash \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right] \; , \tag{3.45}$$

per cui è un Boreliano visto che l'intersezione finita di Boreliani lo è.
Per costruzione

$$\tilde{A}_j \; \subset \; A_j \qquad \forall \; j = 1, \ldots, k \; .$$

Sia $r \neq s$; senza perdere di generalità possiamo supporre che $r < s$, da cui segue che $r + 1 \leq s$ e quindi che $r \leq s - 1$. Consideriamo il Boreliano $\tilde{A}_s \; = \; A_s \backslash \bigcup_{i=1}^{s-1} A_i$; allora per quanto detto sull'indice r si ha che

$$\tilde{A}_r \; \subset \; A_r \; \subset \; \bigcup_{i=1}^{s-1} A_i \; ,$$

quindi $\tilde{A}_s$ è disgiunto da $\tilde{A}_r$, per cui

$$\tilde{A}_r \cap \tilde{A}_s \; = \; \emptyset \; , \tag{3.46}$$

dunque il punto 4. è verificato.
Resta da dimostrare che $\{\tilde{A}_i\}_{i=1,\ldots,k}$ è un ricoprimento finito per X. L'inclusione $\cup_{i=1}^{k}\tilde{A}_i \subset X$ è ovvia per definizione degli $\tilde{A}_j$; verifichiamo l'altra.
Sia $x \in X$, allora $\exists \quad i \in \{1,\ldots,k\}$ tale che $x \in A_i$; considero l'insieme $\{j \in \{1,\ldots,k\} : \ x \in A_j\}$, il quale è non vuoto e finito, allora ammette un mimino. Sia $i_* \ = \ \min\{1,\ldots,k\}$.
Se $i_* = 1$, allora $x \in A_1 = \tilde{A}_1$ per cui

$$\tilde{A}_1 \ \subset \ \bigcup_{i=1}^{k} \tilde{A}_i \qquad \Rightarrow \qquad x \in \bigcup_{i=1}^{k} \tilde{A}_i \tag{3.47}$$

Se $i_* \geq 2$, allora $x \notin A_r \ \ \forall \ r = 1,\ldots,i_*-1$, ma $x \in A_{i_*}$. Allora

$$x \ \in \ A_{i_*} \setminus \bigcup_{r=1}^{i_*-1} A_i \ = \ \tilde{A}_{i_*} \ \subset \ \bigcup_{i=1}^{k} \tilde{A}_i \qquad \Rightarrow \qquad x \ \in \ \bigcup_{i=1}^{k} \tilde{A}_i \ . \tag{3.48}$$

Poiché questa proprietà è valida $\forall \ x \in X$, allora si ha che $X \subset \cup_{i=1}^{k}\tilde{A}_i$, che porta alla tesi del punto 3.. □

Nota 3.1.7. *Consideriamo uno spazio metrico (X,d) compatto, una misura finita μ di Borel su X e una funzione continua $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia $k_n \in \mathbb{N}$ ed $E_1,\ldots,E_{k_n}$ insiemi Boreliani tali che*

1. $\bigcup_{r=1}^{k_n} E_r \ = \ X$;
2. *diam*$(E_r) \ \leq \ \frac{1}{n} \qquad \forall \ r = 1,\ldots,k_n$;
3. $\forall \ r \neq s \quad \Rightarrow \quad E_r \cap E_s \ = \ \emptyset$.

Consideriamo i punti $\forall \ i = 1,\ldots,k_n$

4. $x_i \in \overline{E}_i$ *a piacere,*
5. $y_i \in \overline{E}_i : \ f(y_i) \ = \ \max_{\overline{E}_i} f \ = \ M_i$,
6. $z_i \in \overline{E}_i : \ f(z_i) \ = \ \min_{\overline{E}_i} f \ = \ m_i$

e le funzioni semplici relative ad essi

$$\chi_n(x) = \sum_{i=1}^{k_n} f(x_i) 1_{E_i} , \tag{3.49}$$

$$\varphi_n(x) = \sum_{i=1}^{k_n} M_i 1_{E_i} , \tag{3.50}$$

$$\psi_n(x) = \sum_{i=1}^{k_n} m_i 1_{E_i} . \tag{3.51}$$

Allora risulta che $\chi_n \in \mathscr{S}$, $\varphi_n \in \mathscr{S}^+(f)$ *e* $\psi_n \in \mathscr{S}^-(f)$, *che*

$$\begin{aligned} \chi_n &\longrightarrow f , \\ \varphi_n &\longrightarrow f , \\ \psi_n &\longrightarrow f \end{aligned}$$

uniformemente in X, *e che*

$$\begin{aligned} \int_X \chi_n \ \mathrm{d}\mu &\longrightarrow \int_X f \ \mathrm{d}\mu , \\ \int_X \varphi_n \ \mathrm{d}\mu &\longrightarrow \int_X f \ \mathrm{d}\mu , \\ \int_X \psi_n \ \mathrm{d}\mu &\longrightarrow \int_X f \ \mathrm{d}\mu . \end{aligned}$$

Dimostrazione:

Per costruzione le funzioni χ_n, φ_n e ψ_n sono semplici. Per ipotesi la famiglia $\{E_i\}_{i=1,\dots,k_n}$ è una partizione μ-misurabile di X, quindi dato $x \in X$ $\exists\,!\ i_0 :$ $x \in E_{i_0}$; allora ricordando la definizione y_{i_0}, $z_{i_0} \in \overline{E}_{i_0}$ si ha

$$f(z_{i_0}) = m_{i_0} = \min_{\overline{E}_{i_0}} f \leq f(x) \leq \max_{\overline{E}_{i_0}} f = M_{i_0} = f(y_{i_0}) . \tag{3.52}$$

Per come sono state definite le funzioni in (3.50) e (3.51) vale che

$$m_{i_0} = \psi_n(x) \quad \text{su } E_{i_0} \qquad \text{e} \qquad M_{i_0} = \varphi_n(x) \quad \text{su } E_{i_0} ; \tag{3.53}$$

allora unendo le (3.52) e (3.53) risulta

$$\psi_n(x) \leq f(x) \leq \varphi_n(x) . \tag{3.54}$$

Poiché la (3.54) vale $\forall\ x \in X$, si può concludere che $\psi_n \in \mathscr{S}^-(f)$ e $\varphi_n \in \mathscr{S}^+(f)$.
Per come sono stati scelti x_i, y_i, z_i risulta che

$$m_i \ = \ f(z_i) \ \leq \ f(x_i) \ \leq \ f(y_i) \ = M_i \ , \tag{3.55}$$

quindi

$$\psi_n(x) \ \leq \ \chi_n(x) \ \leq \ \varphi_n(x) \ , \qquad \forall\ x \in E_i \ . \tag{3.56}$$

Poiché gli $\{E_j\}_j$ costituiscono una partizione di X, risulta

$$\psi_n(x) \ \leq \ \chi_n(x) \ \leq \ \varphi_n(x) \ , \qquad \forall\ x \in X \ . \tag{3.57}$$

1°Fatto: Le funzioni χ_n, φ_n e ψ_n convergono uniformemente ad f su X, per $n \longrightarrow +\infty$.
Per ipotesi f è continua su X e X è un compatto, allora f è uniformemente continua su X; per cui vale che $\forall\ \varepsilon > 0$, $\forall\ g(\varepsilon) > 0 \quad \exists\ \ \delta > 0 :\ x_1, x_2 \in X$ con $d(x_1, x_2) \leq \delta$ risulta

$$|f(x_1) \ - \ f(x_2)| \ \leq \ g(\varepsilon) \ . \tag{3.58}$$

Utilizzando la condizione 2. delle ipotesi, impongo che

$$\frac{1}{n} \ \leq \ \delta \qquad \text{cioè} \qquad \frac{1}{\delta} \ \leq \ n \ ;$$

ora sfruttiamo la nota 3.1.5 sull'insieme E_i e si ha

$$\mathrm{diam}(\overline{E}_i) \ = \ \mathrm{diam}(E_i) \ \leq \ \frac{1}{n} \ \leq \ \delta \ , \tag{3.59}$$

allora

$$\mathrm{diam}(\overline{E}_i) \ \leq \ \delta \ , \qquad \forall\ i = 1, \ldots, k_n \ . \tag{3.60}$$

Poiché $y_i, z_i \in \overline{E}_i$, per definzione del suo diametro e in virtù della (3.60) risulta che

$$d(y_i, z_i) \ \leq \ \mathrm{diam}(\overline{E}_i) \ \leq \ \delta \ , \qquad \forall\ i = 1, \ldots, k_n \ ; \tag{3.61}$$

inoltre per le ipotesi in 5. e 6. vale che

$$0 \ \leq \ M_i \ - \ m_i \ = \ f(y_i) \ - \ f(z_i) \ = \ |f(y_i) \ - \ f(z_i)\ | \ \leq \ g(\varepsilon) \ , \tag{3.62}$$

dove l'ultima relazione è vera perché, valendo la (3.61), possiamo usare la disuguaglianza (3.58). In definitiva $\forall\, \varepsilon > 0$, $\forall\, g(\varepsilon) > 0$ e $\forall\, n \geq 1/\delta$ si ha

$$0 \;\leq\; M_i \;-\; m_i \;\leq\; g(\varepsilon)\;, \qquad \forall\, i = 1, \ldots, k_n\;. \tag{3.63}$$

Poiché $x_i, y_i \in \overline{E}_i$, per definzione di diametro dell'insieme $\overline{E}_i$ e in virtù della (3.60) risulta che

$$d(x_i, y_i) \;\leq\; \mathrm{diam}(\overline{E}_i) \;\leq\; \delta\;, \qquad \forall\, i = 1, \ldots, k_n\;; \tag{3.64}$$

inoltre per le ipotesi in 4. e 5. vale che

$$0 \;\leq\; M_i \;-\; f(x_i) \;=\; f(y_i) \;-\; f(x_i) \;=\; |f(y_i) \;-\; f(x_i)\,| \;\leq\; g(\varepsilon)\;, \tag{3.65}$$

dove l'ultima relazione è vera perché, valendo la (3.64), possiamo usare la disuguaglianza (3.58). In definitiva $\forall\, \varepsilon > 0$, $\forall\, g(\varepsilon) > 0$ e $\forall\, n \geq 1/\delta$

$$0 \;\leq\; M_i \;-\; f(x_i) \;\leq\; g(\varepsilon)\;, \qquad \forall\, i = 1, \ldots, k_n\;. \tag{3.66}$$

Utilizzando la condizione (3.54), le definizioni delle funzioni φ_n e ψ_n in (3.50) e (3.51) e la relazione (3.63) si deduce che $\forall\, \varepsilon > 0$, $\forall\, g(\varepsilon) > 0$, $\forall\, n \geq 1/\delta$ e $\forall\, x \in X$ esiste $i \in \{1, \ldots, k_n\}$ tale che $x \in X$ e

$$0 \;\leq\; \varphi_n(x) - f(x) \;\leq\; \varphi_n(x) - \psi_n(x) \;=\; M_i - m_i \;\leq\; g(\varepsilon)\;, \tag{3.67}$$

$$0 \;\leq\; f(x) - \psi_n(x) \;\leq\; \varphi_n(x) - \psi_n(x) \;=\; M_i - m_i \;\leq\; g(\varepsilon)\;. \tag{3.68}$$

Adesso utilizzando la (3.54) con la (3.57), le definizioni delle funzioni χ_n, φ_n e ψ_n in (3.49), (3.50), (3.51) e la relazione (3.63), si deduce che $\forall\, \varepsilon > 0$, $\forall\, g(\varepsilon) > 0$, $\forall\, n \geq 1/\delta$ e $\forall\, x \in X$ esiste $i \in \{1, \ldots, k_n\}$ tale che $x \in X$ e

$$0 \;\leq\; |f(x) - \chi_n(x)| \;\leq\; \varphi_n(x) - \psi_n(x) \;=\; M_i - m_i \;\leq\; g(\varepsilon)\;. \tag{3.69}$$

In definitiva, $\forall\, \varepsilon > 0$, $\forall\, g(\varepsilon) > 0$, $\forall\, n \geq 1/\delta$ e $\forall\, x \in X$ valgono le stime

$$0 \;\leq\; \varphi_n(x) \;-\; f(x) \;\leq\; g(\varepsilon)\;, \tag{3.70}$$

$$0 \;\leq\; f(x) \;- \psi_n(x) \;\leq\; g(\varepsilon)\;, \tag{3.71}$$

$$0 \;\leq\; |f(x) \;-\; \chi_n(x)| \;\leq\; g(\varepsilon)\;. \tag{3.72}$$

Imponendo che $g(\varepsilon) \leq \varepsilon$, le precedenti relazioni diventano

$$0 \;\leq\; \varphi_n(x) \;-\; f(x) \;\leq\; \varepsilon\;, \tag{3.73}$$

$$0 \;\leq\; f(x) \;- \psi_n(x) \;\leq\; \varepsilon\;, \tag{3.74}$$

$$0 \;\leq\; |f(x) \;-\; \chi_n(x)| \;\leq\; \varepsilon\;, \tag{3.75}$$

valide per ogni $x \in X$; questo assicura che $\chi_n \longrightarrow f$, $\varphi_n \longrightarrow f$ e $\psi_n \longrightarrow f$ uniformemente in X.
Quindi il 1° fatto è dimostrato.

2°Fatto: Verifichiamo la convergenza degli integrali.
Per ipotesi f è continua, allora seguendo lo schema fatto nell'osservazione 3.1.3 si ha che f è una funzione μ-integrabile. Allora per definizione e per la nota 2.1.3, dalle disuguaglianze in (3.54) vale che

$$\int_X \psi_n \; \mathrm{d}\mu \;\leq\; \int_X f \; \mathrm{d}\mu \;\leq\; \int_X \varphi_n \; \mathrm{d}\mu \;, \tag{3.76}$$

mentre dalla (3.57) vale che

$$\int_X \psi_n \; \mathrm{d}\mu \;\leq\; \int_X \chi_n \; \mathrm{d}\mu \;\leq\; \int_X \varphi_n \; \mathrm{d}\mu \;. \tag{3.77}$$

Facciamo la stima della differenza degli integrali delle funzioni semplici φ_n e ψ_n:

$$\begin{aligned} \int_X \varphi_n \; \mathrm{d}\mu \;-\; \int_X \psi_n \; \mathrm{d}\mu \;&=\; \sum_{i=1}^{k_n} M_i \; \mu(E_i) \;-\; \sum_{i=1}^{k_n} m_i \; \mu(E_i) \;= \\ &=\; \sum_{i=1}^{k_n} (M_i \;- m_i) \; \mu(E_i) \;. \end{aligned}$$

In virtù della (3.63), $\forall\ \varepsilon > 0$, $\forall\ g(\varepsilon) > 0$ e $\forall\ n \geq 1/\delta$ segue che

$$(M_i \;-\; m_i) \; \mu(E_i) \;\leq\; g(\varepsilon) \; \mu(E_i) \;, \qquad \forall\ i = 1, \ldots, k_n \;; \tag{3.78}$$

inoltre, poiché gli $\{E_i\}_{i=1,\ldots,k_n}$ sono una partizione μ-misurabile di X, si ha

$$\sum_{i=1}^{k_n} \mu(E_i) \;=\; \mu(X) \;. \tag{3.79}$$

Allora la stima diventa

$$\begin{aligned} \int_X \varphi_n \; \mathrm{d}\mu \;-\; \int_X \psi_n \; \mathrm{d}\mu \;&\leq\; \sum_{i=1}^{k_n} g(\varepsilon) \; \mu(E_i) \;=\; g(\varepsilon) \; \sum_{i=1}^{k_n} \mu(E_i) \;= \\ &=\; g(\varepsilon) \; \mu(X) \;, \end{aligned} \tag{3.80}$$

valida $\forall\ \varepsilon > 0$, $\forall\ g(\varepsilon) > 0$ e $\forall\ n \geq 1/\delta$.
Ora, facciamo la stima della differenza degli integrali delle funzioni semplici φ_n e χ_n:

$$\begin{aligned} \int_X \varphi_n \ \mathrm{d}\mu \ - \ \int_X \chi_n \ \mathrm{d}\mu \ &= \ \sum_{i=1}^{k_n} M_i \ \mu(E_i) \ - \ \sum_{i=1}^{k_n} f(x_i) \ \mu(E_i) \ = \\ &= \ \sum_{i=1}^{k_n} (M_i \ - f(x_i)) \ \mu(E_i) \ \leq \ \sum_{i=1}^{k_n} (M_i \ - m_i) \ \mu(E_i) \ . \end{aligned}$$

Essendo valide le relazioni (3.78) e (3.79), ne segue che $\forall\ \varepsilon > 0$, $\forall\ g(\varepsilon) > 0$ e $\forall\ n \geq 1/\delta$

$$\begin{aligned} \int_X \varphi_n \ \mathrm{d}\mu \ - \ \int_X \chi_n \ \mathrm{d}\mu \ &\leq \ \sum_{i=1}^{k_n} g(\varepsilon) \ \mu(E_i) \ = \ g(\varepsilon) \ \sum_{i=1}^{k_n} \mu(E_i) \ = \\ &= \ g(\varepsilon) \ \mu(X) \ . \end{aligned} \tag{3.81}$$

Allora imponendo che $g(\varepsilon)\ \mu(X) \leq \varepsilon$, le (3.80) e (3.81) diventano:
$\forall\ \varepsilon > 0$ e $\forall\ n \geq 1/\delta$ risulta

$$0 \ \leq \ \int_X \varphi_n \ \mathrm{d}\mu \ - \ \int_X \psi_n \ \mathrm{d}\mu \ \leq \ \varepsilon \ , \tag{3.82}$$

$$0 \ \leq \ \int_X \varphi_n \ \mathrm{d}\mu \ - \ \int_X \chi_n \ \mathrm{d}\mu \ \leq \ \varepsilon \ ; \tag{3.83}$$

le precedenti relazioni garantiscono che

$$\int_X \varphi_n \ \mathrm{d}\mu \ - \ \int_X \psi_n \ \mathrm{d}\mu \ \longrightarrow \ 0 \ , \tag{3.84}$$

$$\int_X \varphi_n \ \mathrm{d}\mu \ - \ \int_X \chi_n \ \mathrm{d}\mu \ \longrightarrow \ 0 \ . \tag{3.85}$$

Osserviamo che nella relazione (3.76) il membro di destra e quello di sinistra rappresentano due successioni numeriche.
Ricordiamo una proprietà dei numeri reali: se $l, a_n, b_n \in \mathbb{R}$ tali che

$$\left.\begin{array}{l} a_n \ \leq \ l \ \leq \ b_n \\ b_n \ - \ a_n \ \longrightarrow \ 0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} a_n \ \longrightarrow \ l \\ b_n \ \longrightarrow \ l \end{array}\right. \ .$$

Dunque, utilizzando questa proprietà considerando come

$$a_n \;=\; \int_X \psi_n \, \mathrm{d}\mu \;, \qquad b_n \;=\; \int_X \varphi_n \, \mathrm{d}\mu \tag{3.86}$$

$$\text{e} \qquad l \;=\; \int_X f \, \mathrm{d}\mu \;, \tag{3.87}$$

concludiamo che per $n \longrightarrow +\infty$

$$\int_X \psi_n \, \mathrm{d}\mu \longrightarrow \int_X f \, \mathrm{d}\mu \qquad \text{e} \qquad \int_X \varphi_n \, \mathrm{d}\mu \longrightarrow \int_X f \, \mathrm{d}\mu \;. \tag{3.88}$$

Dalle disuguaglianze della (3.77) ed essendo valide le condizioni in (3.88), possiamo applicare il teorema dei due carabinieri, per cui

$$\int_X \chi_n \, \mathrm{d}\mu \longrightarrow \int_X f \, \mathrm{d}\mu \tag{3.89}$$

per $n \longrightarrow +\infty$. Quindi anche il 2° fatto è verificato e questo conclude la dimostrazione. □

La nota 3.1.3 e l'osservazione 3.1.1 ci mostrano come approssimare l'integrale di una funzione $f : X \to [m, M]$ μ-integrabile. La nota 3.1.7 ci dice che, quando la funzione è continua, abbiamo anche un altro modo per approssimare l'integrale.
La costruzione esposta nella nota 3.1.7 è quella dell'integrale di Riemann (si divide il dominio in pezzi piccoli), la costruzione descritta nella nota 3.1.3 è quella di Lebesgue (si divide il codominio $[m, M]$ in pezzi piccoli).
Un paragone interessante tra l'integrale di Riemann e quello di Lebesgue è descritto dallo stesso Lebesgue (vedi pagina 266 del libro *"Analisi Matematica 2"* di E. Giusti, Boringhieri Editore, 1986), dove la funzione rappresenta il valore delle monete e l'integrale è il conto che il commerciante fa di tutto l'incasso.