Lezioni di analisi superiore 2

del prof. Francesco Leonetti

29 settembre 2003

Indice

Capitolo 1

Elementi di teoria della misura

Sia X un insieme, sia $\mathcal{P}(X)$ l'insieme delle parti di X, diremo che

$$\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$$

è una *misura* su X se:

1. $\mu(\varnothing) = 0$
2. $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i \Rightarrow \mu(A) \leq \sum_{i=1}^{+\infty} \mu(A_i)$

1.0.1 Osservazione 1

Nella definizione di **misura** abbiamo seguito la nomenclatura di [1]; altri testi chiamano *misura esterna* quello che noi abbiamo chiamato **misura**.

1.0.2 Osservazione 2

Se $A \subseteq B \subseteq X$ allora $\mu(A) \leq \mu(B)$. Infatti possiamo pensare che $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i$ con $A_1 = B, A_2 = \varnothing, A_3 = \varnothing, \ldots A_n = \varnothing, \ldots$ così $\mu(A) \leq \mu(A_1) + \mu(A_2) + \cdots + \mu(A_n) + \cdots = \mu(B) + 0 + 0 + \cdots = \mu(B)$ per le due proprietà di μ come misura.

1.1 Esempi

1. $X = \mathbb{R}^n$ e $\mu = \mathcal{L}^n$ (misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^n$)
2. $X = \mathbb{R}^2$ e $\mu = \mathcal{L}^2$ (misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^2$ ovvero l'AREA)

3. Sia X un insieme, scelto un punto q in X si definisce

$$\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$$

così:

$$\forall A \subseteq X, \mu(A) = 1 \text{ se } q \in A \quad \text{mentre se} \quad q \notin A \text{ allora } \mu(A) = 0$$

μ viene chiamata *misura* o *massa di Dirac* concentrata nel punto q e viene talvolta indicata con δ_q.

Verifichiamo le due proprietà richieste per una misura.

$*$ $\mu(\varnothing) = 0$: è soddisfatta perchè $q \notin \varnothing$

$*$ $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i \Rightarrow \mu(A) \leq \sum_{i=1}^{+\infty} \mu(A_i)$: distinguiamo due casi.

Caso I: $q \in \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i$

Se $q \in \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i \Rightarrow \exists\, j : \ q \in A_j$ inoltre $\sum_{i=1}^{+\infty} \mu(A_i) = lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$.

Per ogni $n \geq j$ vale che:

$$\sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) \geq \mu(A_j) = 1 \tag{1.1}$$

poichè $1 \leq j \leq n$, $\mu(A_i) \geq 0\ \forall\ i$ e $q \in A_j$. Dalla (1.1) segue che:

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) \geq 1 \geq \mu(A)$$

perchè comunque $\mu(A) = 0$ oppure $\mu(A) = 1$ (il limite della serie in questione esiste perchè è a termini positivi per cui la successione delle somme parziali è crescente!)

Caso II: $q \notin \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i$

Se $q \notin \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i \Rightarrow \ q \notin A_i\ \forall\ i \in \mathbb{N} \Rightarrow \mu(A_i) = 0\ \forall\ i \in \mathbb{N}$; inoltre se $q \notin A_i\ \forall\ i \in \mathbb{N} \Rightarrow q \notin A \Rightarrow \mu(A) = 0$ e $\sum_{i=1}^{+\infty} \mu(A_i) = 0$. La proprietà è quindi verificata perchè si ottiene $0 = 0$! $\boxed{\text{cvd}}$

4. Presentiamo ora un modello di misura che viene dalla probabilità di Bernoulli (testa o croce):
sia $X = \{t, c\}$, $\mathcal{P}(X) = \{\varnothing, X, \{t\}, \{c\}\}$
sia $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ tale che

$\mu(\varnothing) = 0$

$\mu(\{t\}) = 1/2$

$\mu(\{c\}) = 1/2$

$\mu(X) = 1$

Verifichiamo le due proprietà richieste per una misura:

$*$ $\mu(\varnothing) = 0$: è evidentemente verificata

$*$ $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i \Rightarrow \mu(A) \leq \sum_{i=1}^{+\infty} \mu(A_i)$: distinguiamo quattro casi.

Caso I: $A = \varnothing$

Se $A = \varnothing \Rightarrow \mu(A) = 0$ ed è vero che $\sum_{i=1}^{+\infty} \mu(A_i) \geq \mu(A) = 0$ in quanto $\mu(A_i) \geq 0 \ \ \forall\, i$

Caso II: $A = \{t\}$

Se $A = \{t\} \Rightarrow \mu(A) = 1/2$, $t \in A$ e A è coperto da $\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i$ allora $t \in \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i \Rightarrow t \in A_j$ per almeno un j. Osserviamo che $\sum_{i=1}^{+\infty} \mu(A_i) \geq \mu(A_j)$ perchè $\mu(A_i) \geq 0 \ \ \forall\, i$. È chiaro che $\mu(A_j) = 1/2$ oppure $\mu(A_j) = 1$ (poichè se $t \in A_j \Rightarrow \ A_j = X$ oppure $A_j = \{t\}$) quindi $\mu(A_j) \geq \mu(A)$ in ogni caso e questo fa sì che la proprietà sia verificata.

Caso III: $A = \{c\}$

Se $A = \{c\} \Rightarrow \mu(A) = 1/2$, $c \in A$ e A è coperto da $\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i$ allora $c \in \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i \Rightarrow c \in A_j$ per almeno un j. Osserviamo che $\sum_{i=1}^{+\infty} \mu(A_i) \geq \mu(A_j)$ perchè $\mu(A_i) \geq 0 \ \ \forall\, i$. È chiaro che $\mu(A_j) = 1/2$ oppure $\mu(A_j) = 1$ (poichè se $c \in A_j \Rightarrow \ A_j = X$ oppure $A_j = \{c\}$) quindi $\mu(A_j) \geq \mu(A)$ in ogni caso e questo fa sì che la proprietà sia verificata.

Caso IV: $A = X$

Se $A = X \Rightarrow \mu(A) = 1$, $t \in A$ e A è coperto da $\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i$ allora $t \in \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i \Rightarrow t \in A_j$ per almeno un j. Allora $\mu(A_j) \geq 1/2$. Inoltre $c \in \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i \Rightarrow c \in A_k$ per almeno un k. Allora $\mu(A_k) \geq 1/2$. Distinguiamo due sottocasi.

Sottocaso $j = k$:

$A_j = A_k$, $t \in A_j$ e $c \in A_j \Rightarrow A_j = A_k = X \Rightarrow \mu(A_j) = 1$. Quindi $\mu(A) = \mu(A_j) \leq \sum_{i=1}^{+\infty} \mu(A_i)$ ovvero quello che volevamo provare.

Sottocaso $j \neq k$:

$$\mu(A) = \mu(X) = 1 = 1/2 + 1/2 \leq \mu(A_k) + \mu(A_j) \leq \sum_{i=1}^{+\infty} \mu(A_i)$$

ovvero quello che volevamo provare. $\boxed{\text{cvd}}$

1.2 Insiemi misurabili

1.2.1 Definizione

Sia X un insieme e μ una misura su X. Consideriamo la famiglia $\mathcal{M}_\mu \subseteq \mathcal{P}(X)$ definita nel modo seguente.
$\mathcal{M}_\mu$ è costituita da tutti gli $A \in \mathcal{P}(X)$ che verificano questa condizione:

$$\forall\ B \in \mathcal{P}(X) \ \text{ vale } \mu(B) = \mu(B \cap A) + \mu(B \setminus A)\,.$$

$\mathcal{M}_\mu$ è detta famiglia degli insiemi *μ-misurabili*.

1.2.2 Proprietà

Sia X un insieme, sia μ una misura su X, sia $\mathcal{M}_\mu$ la famiglia degli insiemi μ-misurabili. Allora:

1. $\varnothing \in \mathcal{M}_\mu, \qquad X \in \mathcal{M}_\mu$
2. $A \in \mathcal{M}_\mu \Rightarrow X \setminus A \in \mathcal{M}_\mu$
3. $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}_\mu \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i \in \mathcal{M}_\mu$ e $\bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i \in \mathcal{M}_\mu$
4. se $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}_\mu$ e $\forall\ i \neq j\ A_i \cap A_j = \varnothing$ allora $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mu(A_i)$
5. se $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}_\mu$ e $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \dots \subseteq A_i \subseteq A_{i+1} \subseteq \dots$ allora
$$\lim_{k\to+\infty} \mu(A_k) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i\right)$$
6. se $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}_\mu$ e $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots \supseteq A_i \supseteq A_{i+1} \supseteq \dots$ con $\mu(A_1) < +\infty$ allora
$$\lim_{k\to+\infty} \mu(A_k) = \mu\left(\bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i\right)$$

1.2.3 Osservazione 3

Sia X un insieme, $x_0 \in X$ con x_0 fissato, $\mu = \delta_{x_0}$ (misura di Dirac concentrata nel punto x_0) allora

$$\mathcal{M}_\mu = \mathcal{P}(X)\,.$$

È chiaro che $\mathcal{M}_\mu \subseteq \mathcal{P}(X)$, per quanto riguarda l'inclusione inversa, sia $A \in \mathcal{P}(X)$, sia $B \in \mathcal{P}(X)$, dobbiamo dimostrare che

$$\delta_{x_0}(B) = \delta_{x_0}(B \setminus A) + \delta_{x_0}(B \cap A).$$

Distinguiamo due casi:
caso I: $x_0 \notin B$
Allora $x_0 \notin B,\ x_0 \notin B \setminus A,\ x_0 \notin B \cap A$ quindi $\delta_{x_0}(B) = 0 = \delta_{x_0}(B \setminus A) = \delta_{x_0}(B \cap A)$. Dunque:
$\delta_{x_0}(B) = 0 = \delta_{x_0}(B \setminus A) + \delta_{x_0}(B \cap A)$ $\boxed{\text{cvd}}$
caso II: $x_0 \in B$
distinguiamo due sottocasi.
Sottocaso 1: $x_0 \in A$
Allora $x_0 \in B,\ x_0 \in B \cap A,\ x_0 \notin B \setminus A$ quindi $\delta_{x_0}(B) = 1 = \delta_{x_0}(B \cap A)$ e $\delta_{x_0}(B \setminus A) = 0$. Dunque:
$\delta_{x_0}(B) = 1 = \delta_{x_0}(B \setminus A) + \delta_{x_0}(B \cap A)$ □
Sottocaso 2: $x_0 \notin A$
Allora $x_0 \in B,\ x_0 \in B \setminus A,\ x_0 \notin B \cap A$ quindi $\delta_{x_0}(B) = 1 = \delta_{x_0}(B \setminus A)$ e $\delta_{x_0}(B \cap A) = 0$. Dunque:
$\delta_{x_0}(B) = 1 = \delta_{x_0}(B \setminus A) + \delta_{x_0}(B \cap A)$ □
$\boxed{\text{cvd}}$

Abbiamo quindi provato l'osservazione 3.

1.2.4 Osservazione 4

Sia $X = \{t, c\}$, sia μ la misura considerata nell'esempio 4), allora

$$\mathcal{M}_\mu = \mathcal{P}(X).$$

È chiaro che $\mathcal{M}_\mu \subseteq \mathcal{P}(X)$, per quanto riguarda l'inclusione inversa, sappiamo che $\varnothing \in \mathcal{M}_\mu$ e che $X \in \mathcal{M}_\mu$. Ora se dimostriamo che $\{t\} \in \mathcal{M}_\mu$ allora anche $X \setminus \{t\} = \{c\} \in \mathcal{M}_\mu$, quindi proviamo che $\{t\} = A \in \mathcal{M}_\mu$, ovvero che per ogni $B \in \mathcal{P}(X)$ risulta che $\mu(B) = \mu(B \cap A) + \mu(B \setminus A)$.
Distinguiamo quattro casi.
Caso I: $B = \varnothing$
Allora $B \cap A = \varnothing$ e $B \setminus A = \varnothing$ quindi $\mu(B) = 0 = \mu(B \cap A) = \mu(B \setminus A)$. Dunque:
$\mu(B) = 0 = \mu(B \cap A) + \mu(B \setminus A)$ □
Caso II: $B = X$
Allora $B \cap A = A$ e $B \setminus A = \{c\}$ quindi $\mu(B) = 1,\ \mu(B \cap A) = 1/2$ e $\mu(B \setminus A) = 1/2$. Dunque:

$\mu(B) = 1 = \mu(B \cap A) + \mu(B \setminus A)$ $\square$

Caso III: $B = \{t\} = A$

Allora $B \cap A = A$ e $B \setminus A = \varnothing$ quindi $\mu(B) = 1/2$, $\mu(B \cap A) = 1/2$ e $\mu(B \setminus A) = 0$. Dunque:

$\mu(B) = 1/2 = \mu(B \cap A) + \mu(B \setminus A)$ $\square$

Caso IV: $B = \{c\}$

Allora $B \cap A = \varnothing$ e $B \setminus A = B$ quindi $\mu(B) = 1/2$, $\mu(B \cap A) = 0$ e $\mu(B \setminus A) = 1/2$. Dunque:

$\mu(B) = 1/2 = \mu(B \cap A) + \mu(B \setminus A)$ $\square$

$\boxed{\text{cvd}}$

Abbiamo quindi provato l'osservazione 4.

1.3 Classificazione delle misure

1.3.1 Cos'è una σ-algebra?

Definizione

Sia X un insieme e sia $\mathcal{P}(X)$ il suo insieme delle parti.
Se $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$, $\mathcal{C}$ è detta *σ-algebra* se verifica queste proprietà:

* $\varnothing \in \mathcal{C}$
* $X \in \mathcal{C}$
* $A \in \mathcal{C} \Rightarrow X \setminus A \in \mathcal{C}$
* $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{C} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i \in \mathcal{C}$

1.3.2 Osservazione 5

$\mathcal{P}(X)$ é una σ-algebra.

1.3.3 Osservazione 6

$\mathcal{M}_\mu$ è una σ-algebra.

Teorema 1.3.1 *Sia X un insieme, sia $\mathcal{C}_j$ una σ-algebra contenuta in $\mathcal{P}(X)$ $\forall\, j \in J$ (J è un insieme di indici che può essere finito, numerabile, non numerabile...) allora, posto $\mathcal{C} = \bigcap_{j \in J} \mathcal{C}_j$, risulta che $\mathcal{C}$ è una σ-algebra.*

DIM:

$\varnothing \in \mathcal{C}_j \;\; \forall\, j \in J \Rightarrow \quad \varnothing \in \mathcal{C}$

$X \in \mathcal{C}_j \;\; \forall\, j \in J \Rightarrow \quad X \in \mathcal{C}$

se $A \in \mathcal{C}$ allora $A \in \mathcal{C}_j \ \ \forall\, j \in J$ quindi $X \setminus A \in \mathcal{C}_j \ \ \forall\, j \in J$ dunque $X \setminus A \in \mathcal{C}$
se $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{C}$ allora $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{C}_j \quad \forall j \in J$ quindi $\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i \in \mathcal{C}_j \quad \forall j \in J$ dunque $\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i \in \mathcal{C}$

Possiamo quindi concludere che $\mathcal{C}$ è una σ-algebra in quanto verifica le proprietà suddette.

$\boxed{\text{CVD}}$

1.3.4 Insiemi aperti e σ-algebra di Borel

Definizione

Sia (X, d) uno spazio metrico.
$A \in \mathcal{P}(X)$ si dice *aperto* $\Leftrightarrow \quad \forall\, x \in A \quad \exists\, \epsilon > 0 :\ d(y, x) < \epsilon \Rightarrow\ y\ \in A$

- Denotiamo con $\mathcal{A}(X)$ la *famiglia dei sottoinsiemi aperti di X.*

Consideriamo ora tutte le σ-algebre $\mathcal{C}_j \ \subseteq \mathcal{P}(X)$ tali che $\mathcal{A}(X) \subseteq \mathcal{C}_j$.

Osservazione 7

La classe di σ-algebre suddetta non è vuota. Infatti $\mathcal{P}(X) \supseteq \mathcal{A}(X)$ e quindi $\mathcal{P}(X)$ appartiene alla classe considerata.

Sia J l'insieme di indici che differenzia le σ-algebre che contengono $\mathcal{A}(X)$; per il teorema 1.3.1 si ha che:
$\bigcap_{j\ \in\ J} \mathcal{C}_j$ è una σ-algebra
e inoltre
se $\mathcal{A}(X) \subseteq \mathcal{C}_j\ \forall\, j \in J\ \Rightarrow\ \mathcal{A}(X) \subseteq \bigcap_{j \in\ J} \mathcal{C}_j$
quindi
$\bigcap_{j\ \in\ J} \mathcal{C}_j$ è una delle σ-algebre che contengono $\mathcal{A}(X)$ ed è la più piccola. Tale σ-algebra è chiamata *σ-algebra di Borel* e si indica con $\mathcal{B}(X)$.

È evidente che $\mathcal{A}(X) \subseteq \mathcal{B}(X) \subseteq \mathcal{P}(X)$.

Definizione:

Se $D \in \mathcal{B}(X)$ allora D è chiamato *boreliano* oppure *insieme di Borel.*

1.3.5 Misure di Borel, misure Borel regolari e misure di Radon

Sia (X, d) uno spazio metrico, sia $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ una misura su X, allora:

- μ è una misura *di Borel* se $\mathcal{B}(X) \subseteq \mathcal{M}_\mu$
- μ è una misura *Borel regolare* se:
  i) $\mathcal{B}(X) \subseteq \mathcal{M}_\mu$
  ii) $\forall\ A \in \mathcal{P}(X)\ \exists\ B \in \mathcal{B}(X) : A \subseteq B$ e $\mu(B) = \mu(A)$
- μ è una misura *di Radon* se:
  i) $\mathcal{B}(X) \subseteq \mathcal{M}_\mu$
  ii) $\forall\ A \in \mathcal{P}(X)\ \exists\ B \in \mathcal{B}(X) : A \subseteq B$ e $\mu(B) = \mu(A)$
  iii) $\forall\ K \subseteq X, K$ compatto, risulta $\mu(K) < +\infty$

Osservazione:

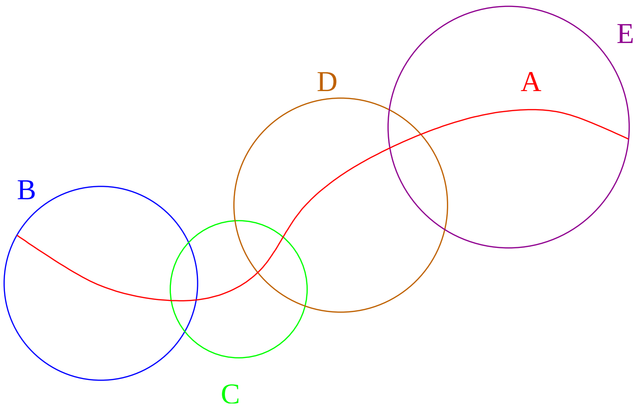
Se $X = \mathbb{R}^n$ con la metrica euclidea e $\mu = \mathcal{L}^n$ allora μ è una misura di Radon.

Capitolo 2

Misura di Hausdorff

Sia $X = \mathbb{R}^n$, sia $A \subset \mathbb{R}^n$ e sia $s \in [0, +\infty)$; quella che chiameremo *Misura di Hausdorff*, e che indicheremo con $\mathcal{H}^s(A)$, sará una funzione dipendente dal parametro s e tale che $\mathcal{H}^s(A) \in [0, +\infty]$ $\forall A \subset \mathbb{R}^n$.
L'obiettivo che ci proponiamo é quello di ottenere:
per s=1 $\quad \mathcal{H}^1(A) =$ **lunghezza** di A
per s=2 $\quad \mathcal{H}^2(A) =$ **area** di A
per s=3 $\quad \mathcal{H}^3(A) =$ **volume** di A
$\forall A \subset \mathbb{R}^n$.

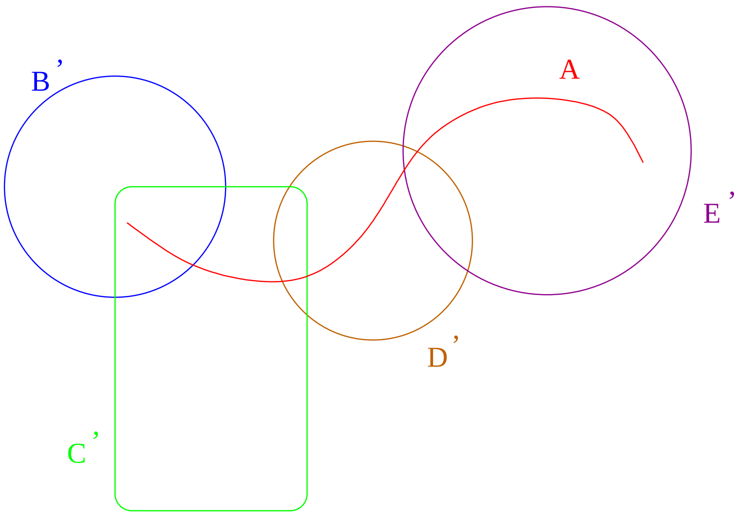
Vediamo il caso della **lunghezza.**
Sia $X = \mathbb{R}^2$ e A come in figura 2.1:



É possibile ricoprire A con gli insiemi B, C, D, E in fig.2.1. Indichiamo B, C, D, E con A_1, A_2, A_3, A_4. La lunghezza di A é approssimata dalla somma dei diametri di A_i per $i = 1, 2, 3, 4$, ovvero:

$$\textit{lunghezza di } A \sim \sum_{i=1}^{4} \mathrm{diam} A_i. \tag{2.1}$$

Osserviamo ora la figura 2.2:



Anche gli insiemi B', C', D', E', che indichiamo con A'_1, A'_2, A'_3, A'_4, ricoprono A ma é evidente che

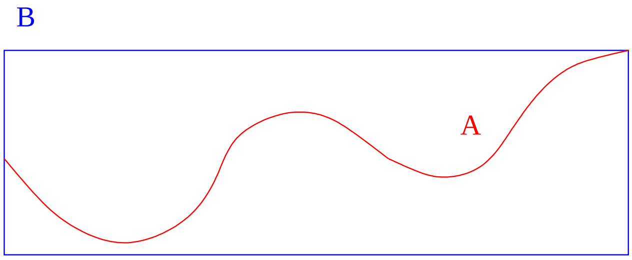
$$\textit{lunghezza di } A < \sum_{i=1}^{4} \mathrm{diam} A'_i. \tag{2.2}$$

Dunque la (2.1) non raggiungerebbe lo scopo.
Esistono infiniti ricoprimenti di A e per avere la migliore approssimazione potremmo porre:

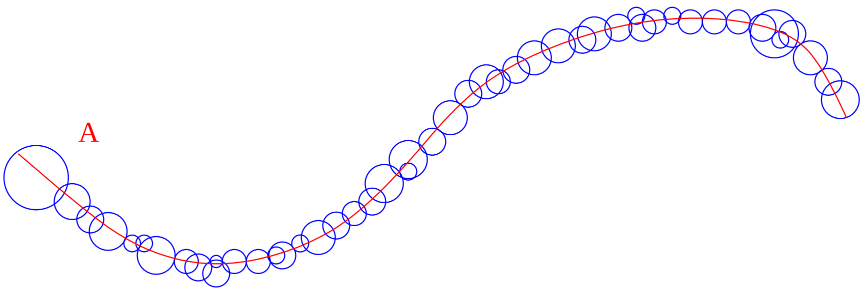
$$\textit{lunghezza di } A \sim \ \inf \left\{ \sum_i \mathrm{diam} A_i \right\} \tag{2.3}$$

dove l'estremo inferiore é fatto su tutte le famiglie di insiemi A_i con $i = 1, 2, 3, \ldots$ tali che $\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i \supset A$.

Anche questa definizione, peró, non é corretta. Osservando la figura 2.3 é infatti evidente che $B \supset A$ ma diam$B <$ lunghezza di A; quindi la definizione sopra ipotizzata non raggiungerebbe lo scopo.



L'idea giusta é invece quella di considerare dei ricoprimenti che seguano la geometria dell'insieme A come, ad esempio, in figura 2.4:



Poniamo allora:

$$l_\delta(A) = \inf \left\{ \sum_j \mathrm{diam} A_j \right\} \tag{2.4}$$

dove l'estremo inferiore é fatto su tutte le famiglie di insiemi A_j con $j = 1, 2, 3, \ldots$ tali che $\bigcup_{j=1}^{+\infty} A_j \supset A$ e diam$A_j \leq \delta \; \forall \; j$.
Per fare in modo che il ricoprimento segua la geometria di A, facciamo tendere δ a zero:

$$\lim_{\delta \to 0^+} l_\delta(A). \tag{2.5}$$

In generale, $\forall \; \delta > 0$, si pone:

$$\mathcal{H}^s_\delta(A) = 0 \qquad \text{se } s = 0 \text{ e } A = \varnothing$$

e

$$\mathcal{H}^s_\delta(A) = \inf \left\{ \sum_{i \in I} \alpha(s) \left(\frac{\mathrm{diam} A_i}{2} \right)^s \text{ t.c } \bigcup_{i \in I} A_i \supset A, \; \mathrm{diam} A_i \leq \delta \; \forall \; i \text{ e } |I| \leq |\mathbb{N}| \right\} \text{ altrimenti}$$

dove

$$\alpha(s) = \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma(\frac{s}{2}+1)} \quad \text{con} \quad \Gamma(t) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x} \; x^{t-1} \; \mathrm{d}x \tag{2.6}$$

Spiegheremo in seguito il motivo della presenza del fattore $\frac{\alpha(s)}{2^s}$ nella definizione di $\mathcal{H}^s_\delta(A)$.

Osserviamo che, fissato A e fissato s, si ha:

$$\mathcal{H}^s_{\delta_1}(A) \geq \mathcal{H}^s_{\delta_2}(A) \qquad\qquad \text{con } \delta_1 < \delta_2 \tag{2.7}$$

infatti, se $\delta_1 < \delta_2$ risulta che:

$$\left\{ \sum_{i \in I} \alpha(s) \ \left(\frac{\text{diam}A_i}{2}\right)^s \ \text{t.c} \ \bigcup_{i \in I} A_i \supset A, \ \text{diam}A_i \leq \delta_1 \ \forall\ i \ \text{ e } |I| \leq |\mathbb{N}| \right\} \subset$$
$$\subset \left\{ \sum_{i \in I} \alpha(s) \ \left(\frac{\text{diam}A_i}{2}\right)^s \ \text{t.c} \ \bigcup_{i \in I} A_i \supset A, \ \text{diam}A_i \leq \delta_2 \ \forall\ i \ \text{ e } |I| \leq |\mathbb{N}| \right\}$$

quindi cosiderando l'**inf** in entrambi i membri otteniamo la (2.7).
Poiché la successione $\{\mathcal{H}^s_\delta(A)\}_{\delta \in \mathbb{R}_+}$ é monotona (decrescente), possiamo concludere che esiste $\lim_{\delta \to 0^+} \mathcal{H}^s_\delta(A)$ e definiamo *Misura di Hausdorff s-dimensionale dell'insieme* A nel modo seguente:

$$\mathcal{H}^s(A) := \lim_{\delta \to 0^+} \mathcal{H}^s_\delta(A) \tag{2.8}$$

2.1 Teorema 1

Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ e $s \in [0, +\infty)$. Risulta che $\mathcal{H}^s : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, +\infty]$ é una misura *Borel regolare* che gode delle seguenti proprietá:

1. $\mathcal{H}^0(A)$ =numero di elementi di A
2. se $s = n$ $\quad$ $\mathcal{H}^n(A) = \mathcal{L}^n(A)$ (con $\mathcal{L}^n$ indichiamo la misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^n$)
3. $\forall\ T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tale che $\|T(x) - T(y)\| = \|x - y\|$ $\forall\ x, y \in \mathbb{R}^n$ (ovvero per ogni **isometria)** allora $\mathcal{H}^s(A) = \mathcal{H}^s(T(A))$
4. $\forall\ O : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tale che $\exists\ \ \lambda > 0$ per cui $O(x) = \lambda x \qquad \forall\ x \in \mathbb{R}^n$ (ovvero per ogni **omotetia)** allora $\lambda^s \mathcal{H}^s(A) = \mathcal{H}^s(O(A))$

Nota:
La presenza del fattore $\frac{\alpha(s)}{2^s}$ nella definizione di $\mathcal{H}^s_\delta(A)$ é dovuta al fatto che, in caso contrario, la propretá 2 non sarebbe verificata ma avremmo l'uguaglianza tra le due misure a meno di costanti.

2.1.1 Osservazione

Abbiamo visto che nella definizione di $\mathcal{H}^s_\delta(A)$, e quindi di $\mathcal{H}^s(A)$, compare il fattore $\alpha(s) = \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma(\frac{s}{2}+1)}$ dove $\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\ x^{t-1}\ \mathrm{d}x$.

Risulta che:

$$0 < \Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right) < +\infty \qquad \forall\ s \in \mathbb{R}_+$$

$$0 < \alpha(s) < +\infty \qquad \forall\ s \in \mathbb{R}_+$$

Dim:

consideriamo la funzione parametrica $\mathrm{f}(x) = \mathrm{e}^{-x}x^{t-1}$ e calcoliamo il valore di $\mathrm{f}(x)$ per $t = \frac{s}{2}+1$:

$\mathrm{f}(x) = \mathrm{e}^{-x}x^{\frac{s}{2}+1-1} = \mathrm{e}^{-x}x^{\frac{s}{2}} = \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\underbrace{\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}x^{\frac{s}{2}}}_{\mathrm{g}(x)}$

N.B: $\mathrm{f} \in C^0\left([0,+\infty)\right)$

Osserviamo che $\lim_{x\to+\infty}\mathrm{g}(x) = 0$ allora $\exists\ M > 0$ t.c.

$\mathrm{g}(x) \leq 1\ \forall\ x \in [M,+\infty)$

Quindi risulta che:

$0 \leq \mathrm{f}(x) \leq \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} \qquad \forall\ x \in [M,+\infty)$

Inoltre é chiaro che:

$\int_M^{+\infty}\mathrm{f}(x)\ \mathrm{d}x = \lim_{R\to+\infty}\underbrace{\int_M^R \mathrm{f}(x)\ \mathrm{d}x}_{\varphi(\mathrm{R})}$

Notiamo che $\varphi(\mathrm{R})$ é una funzione crescente di R (perché $\mathrm{f(x)}\geq 0$), dunque il limite su scritto esiste sempre. Dimostriamo che é **finito**:

$\lim_{R\to+\infty}\varphi(\mathrm{R}) \leq \lim_{\mathrm{R}\to+\infty}\int_{\mathrm{M}}^{\mathrm{R}}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\ \mathrm{d}x = \lim_{\mathrm{R}\to+\infty}\left[-2\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\right]_{\mathrm{M}}^{\mathrm{R}} = \lim_{\mathrm{R}\to+\infty}\left[-2\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{R}}{2}} + 2\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{M}}{2}}\right] = 2\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{M}}{2}} < +\infty \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \square$

Dunque f é integrabile in senso improprio tra M e $+\infty$, ovvero:

$\int_{\mathrm{M}}^{+\infty}\mathrm{f}(x)\ \mathrm{d}x < +\infty$

e inoltre

$\int_0^{\mathrm{M}}\mathrm{f}(x)\ \mathrm{d}x < +\infty$ perché f é continua e $[0,M]$ é compatto.

Concludiamo che:

$$0 \underbrace{\leq}_{\text{perché } \mathrm{f}(x)\geq 0\ \forall\ x\in\mathbb{R}_+} \int_0^{+\infty}\mathrm{f}(x)\ \mathrm{d}x < +\infty$$

Ora mostriamo che $\int_0^{+\infty}\mathrm{f}(x)\ \mathrm{d}x \neq 0$:

$\int_0^{+\infty}\mathrm{f}(x)\ \mathrm{d}x \underbrace{\geq}_{\text{perché } \mathrm{f}(x)\geq 0\ \forall\ x\in\mathbb{R}_+} \int_1^2\mathrm{f}(x)\ \mathrm{d}x$

Se $x \geq 1$ allora $x^{\frac{s}{2}} \geq 1^{\frac{s}{2}} = 1$;

se $x \leq 2$ allora $\mathrm{e}^{-x} \geq \mathrm{e}^{-2}$.

Dunque si ha che:
$\int_0^{+\infty} \mathrm{f}(x)\ \mathrm{d}x \geq \int_1^2 \mathrm{f}(x)\ \mathrm{d}x \geq \int_1^2 \mathrm{e}^{-2} \cdot\ 1\ \mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-2} > 0.$
Da cui segue la tesi:

$$0 < \Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right) < +\infty$$
$$0 < \alpha(s) < +\infty$$

$\boxed{\text{CVD}}$

2.2 Teorema 2

Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ e $0 \leq s < t$. Risulta che:

i) $\mathcal{H}^s(A) < +\infty \Rightarrow \mathcal{H}^t(A) = 0$

ii) $\mathcal{H}^t(A) > 0 \Rightarrow \mathcal{H}^s(A) = +\infty$

Dim:
i)
$*)$ se $A = \varnothing$ allora, poiché $\mathcal{H}^t$ é una misura, risulta che:
$\mathcal{H}^t(A) = 0$ .... $\square$
$*)$ se $A \neq \varnothing$ allora, poiché $\mathcal{H}^s(A) = \lim_{\delta\to 0^+} \mathcal{H}^s_\delta(A)$ e $\mathcal{H}^s(A) \in \mathbb{R}$, $\exists\ \ \delta_0 >$ 0 t.c. $\forall\ \delta \in (0, \delta_0)$ risulta che:
$\mathcal{H}^s_\delta(A) < \mathcal{H}^s(A) + 1 = M < +\infty$
Ricordiamo che

$$\mathcal{H}^s_\delta(A) = \ \inf\left\{\sum_{i\in I} \alpha(s)\ \ \left(\frac{\mathrm{diam}A_i}{2}\right)^s \ \text{t.c} \bigcup_{i\in I} A_i \supset A,\ \mathrm{diam}A_i \leq \delta\ \forall\ i \text{ e } |I| \leq |\mathbb{N}|\right\}$$

Per definizione di **inf** esiste un ricoprimento $\{B_i\}$ t.c.
$\mathrm{diam}B_i \leq \delta\ \forall\ i$, $|I| \leq |\mathbb{N}|$, $\bigcup_{i\in I} B_i \supset A$ e tale che $\sum_{i\in I} \alpha(s)\ \ \left(\frac{\mathrm{diam}B_i}{2}\right)^s < M$
Allora:
$\mathcal{H}^t_\delta(A) \leq \frac{\alpha(t)}{2^t} \sum_{i\in I} (\mathrm{diam}B_i)^t$
moltiplichiamo e dividiamo al secondo membro per $\frac{2^s}{\alpha(s)}$ e otteniamo:

$$\mathcal{H}^t_\delta(A) \leq \underbrace{\frac{\alpha(t)}{\alpha(s)} \frac{2^s}{2^t}}_{\text{é una costante K che non dipende dal ricoprimento}} \frac{\alpha(s)}{2^s} \sum_{i\in I} (\mathrm{diam}B_i)^s\ \underbrace{(\mathrm{diam}B_i)^{t-s}}_{\text{maggiorato da } \delta^{t-s}} \leq$$

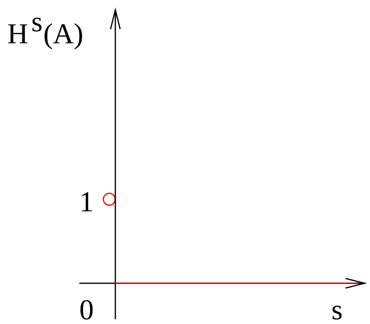
$$\leq K\delta^{t-s} \underbrace{\left[\sum_{i\in I} \frac{\alpha(s)}{2^s} (\mathrm{diam}B_i)^s\right]}_{\text{maggiorato da M}} \leq KM\delta^{t-s}.$$

Quindi:
$\forall\ \delta \in (0, \delta_0)$ vale che $0 \leq \mathcal{H}^t_\delta(A) \leq KM\delta^{t-s}$ e ricordiamo che $\quad t - s > 0$.
Concludiamo che $0 \leq \mathcal{H}^t(A) = \lim_{\delta\to 0^+} \mathcal{H}^t_\delta(A) \leq \lim_{\delta\to 0^+} KM\delta^{t-s} = 0$ ovvero che: $\mathcal{H}^t(A) = 0$ .... □
ii)
se $\mathcal{H}^t(A) > 0$ allora $\mathcal{H}^t(A) \neq 0$ ed é evidente che da questo segue che $\mathcal{H}^s(A) = +\infty$ poiché é la contronominale della proposizione *i)*. .... □
$\boxed{\text{CVD}}$

2.2.1 Esempi*

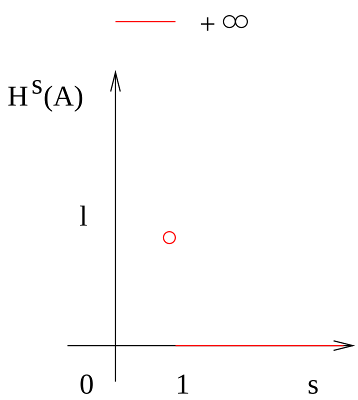
Ex 1:

Sia $n = 1$ e $A = \{x_0\} \subset \mathbb{R}$. Allora, per il Teorema 1,
$\mathcal{H}^0(A)$ =numero di elementi di $A = 1$. Dunque, per il Teorema 2,
$\mathcal{H}^s(A) = 0 \ \ \forall\ s > 0$ (vedi figura 2.5)



Ex 2:

Sia $n = 1$ e $A = [0, l] \subset \mathbb{R}$ con $l > 0$. Allora, per il Teorema 1,
$\mathcal{H}^1(A) = \mathcal{L}^1(A) = l$ =lunghezza di A; $0 < l < +\infty$ dunque, per il Teorema 2,
$\forall\ s < 1 \Rightarrow \mathcal{H}^s(A) = +\infty$
$\forall\ t > 1 \Rightarrow \mathcal{H}^t(A) = 0$ (vedi figura 2.6)



2.3 Teorema 3

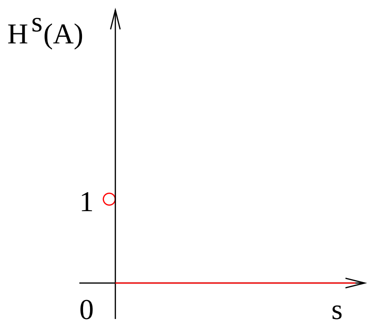
Sia $A \subset \mathbb{R}^m$ e sia $\overline{y} \in \mathbb{R}^k$. Si consideri l'insieme $A \times \{\overline{y}\}$. Risulta che:

$$\mathcal{H}^s(A) = \mathcal{H}^s(A \times \{\overline{y}\}) \qquad \forall\ s \geq 0$$

2.3.1 Esempi**

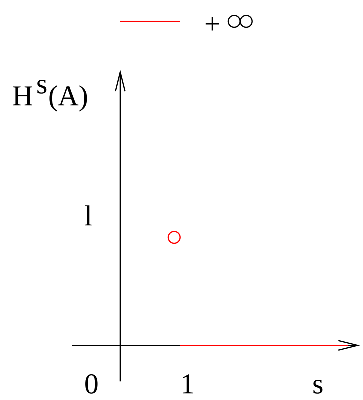
Ex 1:

Sia $n = 2$ e $A = \{(x_0, y_0)\} \subset \mathbb{R}^2$. Allora, per il Teorema 1,
$\mathcal{H}^0(A) =$ numero di elementi di $A = 1$; dunque, per il Teorema 2,
$\forall\ t > 0 \qquad \mathcal{H}^t(A) = 0$ (vedi figura 2.7)



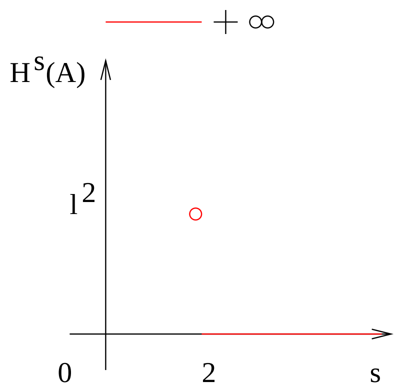
Ex 2:

Sia $n = 2$ e $A = [0, l] \times \{2\} \subset \mathbb{R}^2$ con $0 < l < +\infty$. Allora, per il Teorema 3,
$\mathcal{H}^1(A) = \mathcal{H}^1([0, l] \times \{2\}) = \mathcal{H}^1([0, l]) = l$.
Dunque, per il Teorema 2, risulta che
$\forall\ s < 1 \quad \mathcal{H}^s(A) = +\infty \quad$ e $\quad \forall\ t > 1 \quad \mathcal{H}^t(A) = 0$
(vedi figura 2.8)



Ex 3:

Sia $n = 2$ e $A = [0, l] \times [0, l] \subset \mathbb{R}^2$ con $0 < l < +\infty$. Allora, per il Teorema 1,
$0 < \mathcal{H}^2(A) = \mathcal{L}^2(A) = l^2 < +\infty$. Dunque, per il Teorema 2, risulta che
$\forall\ t > 2 \quad \mathcal{H}^t(A) = 0$ e
$\forall\ s < 2 \quad \mathcal{H}^s(A) = +\infty$ (vedi figura 2.9)



2.3.2 Osservazione

Per quanto riguarda la dimensione di un insieme A, tutti concordiamo che la dimensione di un segmento é 1 e che la dimensione di un quadrato é 2.
Notiamo che nell'**Ex 2**, in cui l'insieme A é un segmento, la dimensione dell'insieme A é 1 come pure é 1 l'ascissa del punto di salto nel grafico della misura di Hausdorff.
Nell'**Ex 3**, in cui l'insieme A é un quadrato, la dimensione dell'insieme A é 2 come pure é 2 l'ascissa del punto di salto nel grafico della misura di Hausdorff.

Osserviamo che é un pó difficile descrivere matematicamente la condizione "s_0 é l'ascissa del punto di salto del grafico $s \to \mathcal{H}^s(A)$".
Si noti che, nell'**Ex2**, l'ascissa del punto di salto é l'estremo inferiore degli s per cui $\mathcal{H}^s(A) = 0$. Anche nell'**Ex3**, l'ascissa del punto di salto coincide con l'estremo inferiore degli s per cui $\mathcal{H}^s(A) = 0$.
É dunque naturale definire la *dimensione* di un qualunque insieme A cosí:

$$\underbrace{\dim_{\mathcal{H}}(A)}_{\text{dimensione di Hausdorff di } A} := \inf\{s \geq 0 \mid \mathcal{H}^s(A) = 0\} \qquad \forall\ A \subset \mathbb{R}^n$$

2.3.3 Nota 1

La classe degli s sui quali si fa l'inf non é vuota, risulta infatti che :
se $A \subset \mathbb{R}^n$ e $s > n$ allora $\mathcal{H}^s(A) = 0$.

2.3.4 Nota 2

- Se $A \subset \mathbb{R}^2$ e $A =$ *un segmento* allora $\dim_{\mathcal{H}}(A) = 1$ (Parliamo di un segmento generale perché comunque scelto un segmento in $\mathbb{R}^2$ é possibile ricondursi al segmento dell'**Ex 2** mediante una isometria e sappiamo che questo non influisce sulla misura di Haussdorff in virtú del Teorema 1).
- Se $A \subset \mathbb{R}^2$ e $A =$ *un quadrato* allora $\dim_{\mathcal{H}}(A) = 2$ (Parliamo di un quadrato generale perché comunque scelto un quadrato in $\mathbb{R}^2$ é possibile ricondursi al quadrato dell'**Ex 3** mediante una isometria e sappiamo che questo non influisce sulla misura di Haussdorff in virtú del Teorema 1).

2.4 Teorema 4

Sia $A \subset \mathbb{R}^n$, $A \neq \varnothing$. Risulta che:

1. $0 \leq \dim_{\mathcal{H}}(A) \leq n$
2. Se $\overline{s} > \dim_{\mathcal{H}}(A)$ allora $\mathcal{H}^{\overline{s}}(A) = 0$
3. Se $0 \leq \hat{s} < \dim_{\mathcal{H}}(A)$ allora $\mathcal{H}^{\hat{s}}(A) = +\infty$

Dim:

1.

$\{s \geq 0 :\ \mathcal{H}^s(A) = 0\} \supset (n, +\infty)$, per la **Nota 1**

Quindi:

$0 \leq \underbrace{\inf\{s \geq 0 :\ \mathcal{H}^s(A) = 0\}}_{\dim_{\mathcal{H}}(A)} \leq \inf(n, +\infty) = n \ldots\ldots\ldots \square$

2.

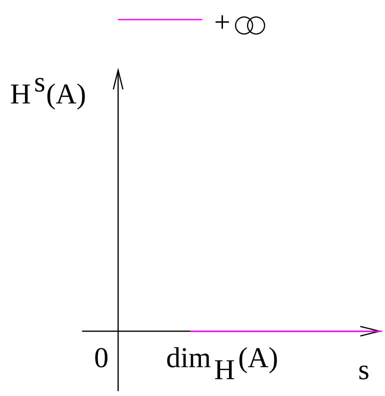
se $\overline{s} > \dim_{\mathcal{H}}(A) = \inf\{s \geq 0 \mid \mathcal{H}^s(A) = 0\}$ allora, per definizione di **inf**, $\exists$ $\mathrm{s}_1 \geq 0$ t.c. $\mathcal{H}^{s_1}(A) = 0$ e $\overline{s} > s_1 \geq \dim_{\mathcal{H}}(A)$
dunque si ha che:
$\forall\ t > s_1 \qquad \mathcal{H}^t(A) = 0$ (perché $\mathcal{H}^{s_1}(A) < +\infty$ e usiamo il Teorema 2)
Per $t = \overline{s}$ si ha:
$\mathcal{H}^{\overline{s}}(A) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \square$

3.

Sia $\mathrm{s}^* = \frac{\hat{\mathrm{s}} + \dim_{\mathcal{H}}(A)}{2}$
É evidente che: $0 \leq \hat{\mathrm{s}} < \mathrm{s}^* < \dim_{\mathcal{H}}(A) = \inf\{s \geq 0 \mid \mathcal{H}^s(A) = 0\}$
Quindi
$\mathcal{H}^{\mathrm{s}^*}(A) > 0$, allora, per il Teorema 2,
$\mathcal{H}^{\hat{\mathrm{s}}}(A) = +\infty \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \square$ $\boxed{\text{CVD}}$

2.4.1 Conseguenza

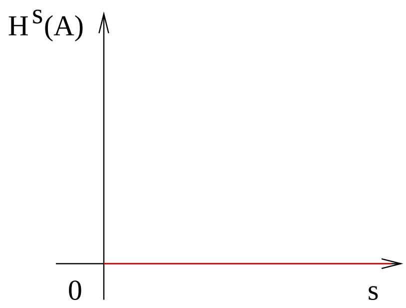
$*$ Se $\dim_{\mathcal{H}}(A) > 0$ il grafico della misura di Haussdorff ha questa forma:



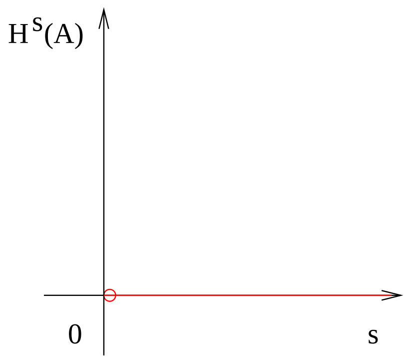
Indichiamo con **m** il valore $\mathcal{H}^{\dim_{\mathcal{H}}(A)}(A)$.

Il teorema 4 non ci dice quanto vale **m,** comunque nel grafico c'é un **unico** punto di salto indipendentemente dal valore di **m** (tale valore puó essere $+\infty, 0$ o un qualsiasi valore intermedio).

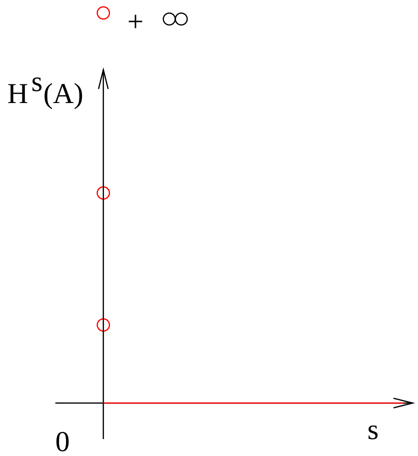
$*$ Se $\dim_{\mathcal{H}}(A) = 0$ il grafico della misura di Haussdorff ha questa forma:



Se $A = \varnothing$ allora $\mathcal{H}^0(A) = 0$ e il grafico non ha punti di salto (la funzione $\mathcal{H}^s(A)$ é continua).



Se, invece, $A \neq \varnothing$ allora $\mathcal{H}^0(A) = |A| \geq 1$ (in quanto A ha almeno un elemento) quindi nel grafico c'é un **unico** punto di salto (la funzione $\mathcal{H}^s(A)$ é discontinua in zero).



Le precedenti considerazioni ci portano a concludere che:

$$\dim_{\mathcal{H}}(A) = \inf\{s \geq 0 \mid \mathcal{H}^s(A) = 0\} \equiv \text{ascissa del punto di salto nel grafico di } s \to \mathcal{H}^s(A) \text{ se } A \neq \varnothing$$

2.5 Conclusioni

L'obiettivo che ci eravamo proposti (ottenere:
per s=1 $\quad\mathcal{H}^1(A)$ = **lunghezza** di A
per s=2 $\quad\mathcal{H}^2(A)$ = **area** di A
per s=3 $\quad\mathcal{H}^3(A)$ = **volume** di A
$\forall A \subset \mathbb{R}^n$
puó considerarsi raggiunto se si accettano due teoremi di cui riportiamo approssimativamente l'enunciato.

2.5.1 Teorema $\boxed{1}$

Sia f: $[a, b] \to \mathbb{R}^n$, siano soddisfatte determinate ipotesi che non riportiamo (si veda[1]) e sia A = f($[a, b]$). Risulta che:

$$\underbrace{\int_a^b \|f'(t)\|_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}t}_{\text{lunghezza di } A} = \mathcal{H}^1(A)$$

2.5.2 Teorema $\boxed{2}$

Sia g: $U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, siano soddisfatte determinate ipotesi che non riportiamo (si veda [1]) e sia A = grafico di g $= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in U$ e $z = g((x, y))\}$(A é una superfice regolare sotto le ipotesi richieste). Risulta che:

$$\underbrace{\iint_U \sqrt{1 + \|Dg(x, y)\|^2_{\mathbb{R}^2}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y}_{\text{area di } A} = \mathcal{H}^2(A)$$

Bibliografia

[1] Evans L., Gariepy R. *Measure theory and fine properties of functions.* CRC Press 1992.

[2] Federer H. *Geometric measure theory.* Springer Verlag. 1969

[3] Di Cesare V. *Misura di Hausdorff e funzioni lipschitziane.* Tesi di laurea in Matematica, Universitá di l'Aquila, anno accademico 1995-96.

[4] Loukaides P. *Misura di Hausdorff.* Tesi di laurea in Matematica, Universitá di l'Aquila, anno accademico 2001-02.

[5] Marcheggiani Sara. *Misura di Hausdorff e frattali.* Tesi di laurea in Matematica, Universitá di l'Aquila, anno accademico 1996-97.

[6] Turchi E. *Misura ed integrazione.* Tesi di laurea in Matematica, Universitá di l'Aquila, anno accademico 1997-98.