Istituzioni di Geometria Superiore I

Esercizi su spazi affini e affinità

Esercizio 1. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita su $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Una *combinazione baricentrica* di m punti $P_1, \cdots, P_m \in \mathbb{A}(V)$ è una combinazione lineare $\sum_{i=1}^{m} a_i P_i$ tale che $\sum_{i=1}^{m} a_i = 1$. Dimostrare che un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{A}(V)$ è un sottospazio affine se e solo se è chiuso per combinazioni baricentriche.

Esercizio 2. Determinare quali dei seguenti sottoinsiemi sono sottospazi affini di $\mathbb{A}(V)$ per qualche spazio vettoriale V (precisando eventualmente quale sia V e quale sia la giacitura del sottospazio considerato):

(i) l'unione $r \cup s$ di due rette $r, s \subset \mathbb{R}^2$ passanti per l'origine;

(ii) l'insieme delle matrici quadrate di ordine n a coefficienti reali la cui traccia è uguale a 1;

(iii) l'insieme delle matrici quadrate A di ordine 4 a coefficienti complessi della forma

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 1 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 1 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 1 & a_{44} \end{pmatrix};$$

(iv) l'insieme $\mathbb{R}_n[x]$ dei polinomi di grado n a coefficienti in $\mathbb{R}$;

(v) l'insieme dei polinomi $p(x)$ a coefficienti in $\mathbb{R}$ tali che $p(x) - x^5$ ha grado minore o uguale a 3.

Esercizio 3. Sia V uno spazio vettoriale e W un suo sottospazio. Dimostrare che lo spazio vettoriale quoziente V/W con la proiezione canonica $\pi : V \to V/W$ soddisfa la seguente proprietà universale. Data una qualsiasi applicazione lineare $f : V \to U$ tale che $f(W) = \underline{0}$, esiste un'unica applicazione lineare $g : V/W \to U$ tale che $f = g \circ \pi$:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[rr, "\pi"] \arrow[dr, "f"'] & & V/W \arrow[dl, "\exists ! g"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

Esercizio 4. Usare l'Esercizio 3 per dimostrare che , data una qualsiasi applicazione lineare $f : V \to W$, si ha $\mathrm{Im} f \simeq V/\mathrm{Ker} f$.

Esercizio 5. Si consideri lo spazio affine $\mathbb{A}^4(\mathbb{R})$. Si determinino:

- l'equazione cartesiana dell' iperpiano H passante per $P = (1, 1, 1, 1)$ e ortogonale al vettore $\underline{v} = (1, 2, 3, 4)$ rispetto al prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^4$;
- l'equazione cartesiana dell'iperpiano H_4 passante per i quattro punti $\underline{e}_1 = (1, 0, 0, 0), \underline{e}_2 = (0, 1, 0, 0), \underline{e}_3 = (0, 0, 1, 0), \underline{e}_4 = (0, 0, 0, 1)$;
- la dimensione di $H \cap H_4$.

Esercizio 6. Si dica, fornendo un esempio per ogni possibilità, quali sono le possibili posizioni relative e intersezioni di:

(i) due piani di $\mathbb{R}^4$;

(ii) due iperpiani di $\mathbb{R}^4$.

Esercizio 7. Quanti piani passano per quattro punti di $\mathbb{R}^4$?

Esercizio 8. Scrivere l'unica affinità $f : \mathbb{A}^2(\mathbb{Q}) \to \mathbb{A}^2(\mathbb{Q})$ tale che

$$f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \; f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \; f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 9. Fissato un punto $C \in \mathcal{A}$, si definisca $\sigma_C : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ l'applicazione che associa ad un punto $P \in \mathcal{A}$ l'unico punto $Q =: \sigma_C(P)$ tale che $\overrightarrow{CQ} = -\overrightarrow{CP}$. Dimostrare che σ_C è un'affinità. Tale affinità è detta *simmetria di $\mathcal{A}$ rispetto a C*. Fissato un riferimeno affine $RA(C, \underline{v}_1, \cdots, \underline{v}_n)$ di $\mathcal{A}$ centrato in C, scrivere le coordinate affini di $\sigma_C(P)$ in funzione di quelle di P.

Esercizio 10. Fissato un punto $P_0 \in \mathcal{A}$ e uno scalare $\lambda \in \mathbb{K}$, si definisca l'applicazione $\omega_{P_0,\lambda} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ che associa ad un punto $P \in \mathcal{A}$ l'unico punto $Q =: \omega_{P_0,\lambda}(P)$ tale che $\overrightarrow{P_0Q} = \lambda\overrightarrow{P_0P}$. Dimostrare che $\omega_{P_0,\lambda}$ è un'affinità. Tale affinità è detta *omotetia di centro P_0 e valore λ*. Fissato un riferimeno affine $RA(P_0, \underline{v}_1, \cdots, \underline{v}_n)$ di $\mathcal{A}$ centrato in P_0, scrivere le coordinate affini di $\omega_{P_0,\lambda}(P)$ in funzione di quelle di P.