Istituzioni di Geometria Superiore I

Esercizi su dualità e proiettività

Esercizio 1. Scrivere la proposizione duale di ciascuna delle seguenti proposizioni:

(a) In $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$, date due rette sghembe r e r' ed un punto P al di fuori di esse, esiste un'unica retta s contenente il punto ed incidente entrambe le rette date.

(b) In $\mathbb{P}^4(\mathbb{R})$, dati un piano π e una retta r che non si intersecano, comunque si prenda una retta s contenuta in π, esiste un solo iperpiano che contiene r e s.

(c) Tre rette distinte r, s, t in $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$, che non giacciono in uno stesso piano ma sono a due a due complanari, hanno sempre un punto in comune.

Esercizio 2. Dimostrare le proposizioni dell'Esercizio 1 o le loro duali.

Determinare inoltre le equazioni cartesiane della retta s nella proposizione (a), nel caso in cui $P = [0 : 1 : 0 : 1]$ e le equazioni cartesiane di r e r' siano

$$r : x_0 - x_2 + 2x_3 = 2x_0 + x_1 = 0, \quad r' : 2x_1 - 3x_2 + x_3 = x_0 + x_3 = 0.$$

Esercizio 3. Nel piano proiettivo $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, si considerino i punti $P = [2 : 1 : 2]$ e $Q = [1 : 0 : 7]$. Determinare, nel piano proiettivo duale $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})^\vee$ con riferimento duale, le coordinate proiettive del punto corrispondente alla retta r per P e Q. Determinare inoltre equazioni parametriche e cartesiane della retta di $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})^\vee$ corrispondente al punto P.

Esercizio 4. Sia $f \in PGL(2, \mathbb{R})$ la proiettività definita da

$$f([x_0 : x_1]) = [-x_1 : 2x_0 + 3x_1].$$

(i) Si determino i punti fissi di f.

(ii) Se $P = [2 : 5] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$, si calcoli il birapporto $\beta(A, B, P, f(P))$, dove A e B sono i punti fissi di f.

Esercizio 5. Sia $f \in PGL(2, \mathbb{R})$ una proiettività con due punti fissi A e B. Dimostrare che il birapporto $\beta(A, B, P, f(P))$ è costante al variare di $P \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \setminus \{A, B\}$.

Esercizio 6.

Si considerino in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ i punti

$$P_1 = [1 : 0 : 0],\ P_2 = [0 : -1 : 1],\ P_3 = [0 : 0 : -1],\ P_4 = [1 : -1 : 2],$$

$$Q_1 = [3 : 1 : -1],\ Q_2 = [-1 : -3 : 3],\ Q_3 = [-1 : 1 : 3],\ P_4 = [1 : -1 : 5].$$

(i) Si costruisca, se esiste, una proiettività $f \in PGL(3, \mathbb{R})$ tale che $f(P_i) = Q_i$ per $1 \leq i \leq 4$ e si dica se è unica.

(ii) Si verifichi che f ha un punto fisso P e una retta di punti fissi r tale che $P \notin r$.

Esercizio 7. (Facoltativo) Sia $f \in PGL(2, \mathbb{R})$ e siano $A, B, C \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ punti distinti tali che $f(A) = A$ e $f(B) = C$. Si mostri che A è l'unico punto fisso di f se e solo se $\beta(A, C, B, f(C)) = -1$.