Istituzioni di Geometria Superiore I

Esercizi su proiezioni, quadriche e topologia quoziente

Esercizio 1. In uno spazio proiettivo $\mathbb{P}(V)$ di dimensione n siano fissati un iperpiano H e un punto $C \notin H$. L'applicazione

$$\begin{aligned} \pi_{C,H} : \mathbb{P}(V) \setminus \{C\} &\longrightarrow H \\ P &\longmapsto \langle C, P \rangle \cap H \end{aligned}$$

è detta *proiezione su H di centro C*.

(i) Verificare che $\pi_{C,H}$ è un'applicazione ben definita e suriettiva.

(ii) Mostrare che esiste un sistema di riferimento proiettivo su $\mathbb{P}(V)$ rispetto al quale l'iperpiano H ha equazione $x_0 = 0$, il punto C ha coordinate $[1 : 0 : \ldots : 0]$ e $\pi_{C,H}$ si scrive come

$$\pi_{C,H}([x_0 : \ldots : x_n]) = [0 : x_1 : \ldots : x_n].$$

(iii) Dimostrare che, dato un altro iperpiano H' non contenente C, la restrizione di $\pi_{C,H}$ a H' è un isomorfismo di spazi proiettivi da H' in H che lascia fisso ogni punto di $H \cap H'$.

Esercizio 2. In uno spazio proiettivo $\mathbb{P}(V)$ di dimensione n siano fissati due sottospazi proiettivi sghembi S, T tali che $\langle S, T \rangle = \mathbb{P}(V)$. L'applicazione

$$\begin{aligned} \pi_{S,T} : \mathbb{P}(V) \setminus S &\longrightarrow T \\ P &\longmapsto \langle S, P \rangle \cap T \end{aligned}$$

è detta *proiezione su T di centro S*.

(i) Verificare che $\pi_{S,T}$ è un'applicazione ben definita.

(ii) Verificare che $\pi_{S,T}$ è suriettiva e che lascia fisso ogni punto di T.

(ii) Mostrare che esiste un sistema di riferimento proiettivo su $\mathbb{P}(V)$ rispetto al quale S ha equazioni $x_0 = \ldots = x_k = 0$ e T ha equazioni $x_{k+1} = \ldots = x_n = 0$. Scrivere l'espressione di $\pi_{S,T}$ in coordinate rispetto a tale riferimento.

Esercizio 3. Dimostrare che ogni quadrica in $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ non degenere (cioè di rango massimo) è proiettivamente equivalente alla quadrica $\mathcal{Q}$ di equazione

$$\mathcal{Q} : x_0x_2 - x_1x_3 = 0.$$

Mostrare che tale quadrica contiene due famiglie di rette (dette *schiere*) $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}'$ tali che

- due qualsiasi rette nella stessa schiera sono sghembe;
- due qualsiasi rette di schiere diverse sono incidenti;
- per ogni punto di $\mathcal{Q}$ passa una retta di ciascuna schiera.

Esercizio 4. In $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ si consideri la quadrica degenere di rango 3

$$\mathcal{Q} : x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0.$$

Dimostrare che $\mathcal{Q}$ è immagine inversa di una conica $\mathcal{C}$ di rango massimo nel piano proiettivo $H_3 : x_3 = 0$ tramite la proiezione su H_3 di centro $C = [0 : 0 : 0 : 1]$. Dedurne che $\mathcal{Q}$ contiene una famiglia di rette tale che:

- tutte le rette della famiglia passano per C;
- per ogni punto di $\mathcal{Q}$ passa esattamente una retta della famiglia.

La quadrica $\mathcal{Q}$ viene detta *cono su* $\mathcal{C}$ *di vertice* C.

Cosa si può dire invece sulle quadriche in $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ di rango 1, 2 o 3? Più in generale, cosa si può dire su una quadrica in $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ di rango $r < n+1$?

Esercizio 5. Si classifichi la conica proiettiva $\mathcal{C}$ in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ di equazione

$$\mathcal{C} : 2x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + 6x_0x_1 - 2x_0x_2 + x_0^2 = 0.$$

Si classifichino poi le coniche affini ottenute restringendo $\mathcal{C}$ agli aperti affini U_0, U_1, U_2 e
$U := \{[x_0 : x_1 : x_2] \,|\, x_0 + x_1 + x_2 \neq 0\}$.

Esercizio 6. Sulla calotta sferica superiore

$$S^2_+ := \{\underline{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1,\ x_3 \geq 0\} \subset S^2$$

si consideri la relazione di equivalenza:

$$\underline{x} \sim \underline{y} \ \Leftrightarrow \underline{x} = \underline{y},\ \text{oppure } x_3 = y_3 = 0 \text{ e } \underline{y} = -\underline{x}.$$

(a) Dimostrare che $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ è omeomorfo a $S^2_+/\sim$.

(b) Usare il punto (a) per dimostrare che $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ è omeomorfo al quoziente del disco bidimensionale

$$D^2 =:= \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2 \mid ||x|| \leq 1\}$$

per la relazione d'equivalenza:

$$\underline{x} \sim \underline{y} \ \Leftrightarrow \underline{x} = \underline{y},\ \text{oppure } ||x|| = ||y|| = 1 \text{ e } \underline{y} = -\underline{x}.$$