Istituzioni di Geometria Superiore I

Settimo foglio di esercizi

Esercizio 1. Sia $X \subset \mathbb{P}^n$ un insieme algebrico non vuoto e sia $\pi : \mathbb{A}^{n+1} \setminus \{\underline{0}\} \to \mathbb{P}^n$ la proiezione canonica. Definiamo il *cono affine su* X come

$$C(X) := \pi^{-1}(X) \cup \{\underline{0}\} \subset \mathbb{A}^{n+1}.$$

(i) Dimostrare che $C(X)$ è un insieme algebrico e che $I(C(X)) = I_{\mathbb{P}}(X)$.

(ii) Dimostrare che $C(X)$ è irriducibile se e solo se lo è X.

Esercizio 2. Sia $X = V(xt - yz) \subset \mathbb{A}^4$ e si consideri la funzione razionale $f = \left[\frac{x}{y}\right] \in K(X)$. Trovare il dominio di f e mostrare che è più grande dell'aperto X_y.

Esercizio 3. Per $n \geq 2$, sia $X_n = V(x_1 x_2 \cdots x_n - 1) \subset \mathbb{A}^n$. Si dimostri che X_n è birazionale ma non isomorfo a $\mathbb{A}^n$.

Esercizio 4. Si dimostri che la curva nodale $X = V(x^3 + x^2 - y^2) \subset \mathbb{A}^2$ (vedi Esercizio 4 del Foglio 6) è birazionale a $\mathbb{A}^1$.

Esercizio 5. Si dimostri che la circonferenza $C = V(x^2 + y^2 - 1) \subset \mathbb{A}^2$ è birazionale ma non isomorfa a $\mathbb{A}^1$.

Esercizio 6. Siano $X = V(I) \subset \mathbb{A}^n$ e $Y = V(J) \subset \mathbb{A}^m$ due insiemi algebrici. Dimostrare che l'ideale $I(X \times Y) \subset \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots y_m]$ è uguale all'ideale generato da $I(X)$ e $I(Y)$.