Istituzioni di Geometria Superiore I

Ottavo foglio di esercizi

Esercizio 1. Quali delle seguenti espressioni definiscono mappe razionali $\varphi : \mathbb{P}^n \dashrightarrow \mathbb{P}^m$? Nei casi in cui φ è una mappa razionale, determinare il dominio di φ, dire se φ è birazionale e, in caso affermmativo, descrive la sua inversa razionale.

1. $[x_0 : x_1 : x_2] \mapsto [x_1 : x_2]$;
2. $[x_0 : x_1] \mapsto [x_0 : x_1 : 1]$;
3. $[x_0 : x_1] \mapsto [x_0 : x_1 : 0]$;
4. $[x_0 : x_1 : x_2] \mapsto [1/x_0 : 1/x_1 : 1/x_2]$;
5. $[x_0 : x_1 : x_2] \mapsto [(x_0^3 + x_1^3)/x_2^3 : x_1^2/x_2^2 : 1]$;
6. $[x_0 : x_1 : x_2] \mapsto [x_0^2 + x_1^2 : x_1^2 : x_1^2]$.

Esercizio 2. Si consideri la proiezione $\pi : \mathbb{P}^3 \to \mathbb{P}^2$ data da $\pi([x_0 : x_1 : x_2 : x_3]) = [x_0 : x_1 : x_2]$.

1. Spiegare perchè π è un'applicazione razionale e determinarne il dominio.
2. Dire se π è birazionale.
3. Sia $Q \subset \mathbb{P}^3$ la quadrica di equazione $Q : x_0x_3 - x_1x_2 = 0$. Determinare la chiusura di $\pi(Q)$. Dire poi se la restrizione di π a Q è razionale, regolare, birazionale (determinandone in caso affermativo un'inversa).

Esercizio 3. Dimostrare che $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ è birazionale a $\mathbb{P}^{n+m}$.

Esercizio 4. Dimostrare che gli unici isomorfismi di $\mathbb{P}^n$ in se stesso sono le proiettività.

Esercizio 5. Siano $[x_0 : \ldots : x_d]$ coordinate proittive su $\mathbb{P}^d$ e sia $C_d \subset \mathbb{P}^d$ la curva razionale normale immagine di $v_{1,d}$. Dimostrare che C_d è il luogo dei punti di $\mathbb{P}^d$ che soddisfano

$$\text{rango}\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & \ldots & x_{d-1} \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_d \end{pmatrix} = 1.$$

Esercizio 6. Trovare l'immagine della conica $X = V_{\mathbb{P}}(x_0x_2 - x_1^2) \subset \mathbb{P}^2$ tramite l'applicazione di Veronese $v_{2,2} : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^5$.