Istituzioni di Geometria Superiore I

Nono foglio di esercizi

Esercizio 1. Sia $X \subset \mathbb{A}^n$ una varietà affine e sia U un suo aperto denso. Dimostrare che U contiene sempre un aperto della forma X_f con $f \notin I(X)$.

Esercizio 2. Individuare tutti i punti singolari delle seguenti curve in $\mathbb{A}^2(\mathbb{C})$:

- $y^2 = x^3 - x$;
- $y^2 = x^3 - 6x^2 + 9x$;
- $x^2y^2 + x^2 + y^2 + 2xy(x + y + 1) = 0$;
- $y^2 = x^4 + y^4$;
- $xy = x^6 + y^6$;
- $x^3 = y^2 + x^4 + y^4$.

Esercizio 3. Individuare tutti i punti singolari delle superfici in $\mathbb{A}^3(\mathbb{C})$:

- $xy^2 = z^2$;
- $x^2 + y^2 = z^2$;
- $xy + x^3 + y^3 = 0$.

Esercizio 4. Individuare tutti i punti singolari della superficie in $\mathbb{P}^3$ definita dall'equazione:

$$x_1^2x_2^2 + x_2^2x_0^2 + x_0^2x_1^2 - x_0x_1x_2x_3 = 0.$$

Esercizio 5. Sia $X = V(F) \subset \mathbb{A}^n$ un'ipersuperficie che non è un iperpiano. Dimostrare che per ogni $P \in X$ l'intersezione $X \cap T_PX$ è singolare nel punto P.

Esercizio 6. Dimostrare che l'unione dei tre assi in $\mathbb{A}^3$ non è isomorfa ad alcuna curva piana.

Esercizio 7. Mostrare come risolvere le singolarità delle seguenti curve facendo uno o più scoppiamenti:

- $y^3 = x^4$;
- $y^3 = x^5$;
- $(y^2 - x^2)(y^2 - x^5) = x^8$.

Esercizio 8. Sia $C_n := V(y^2 - x^{2n+1}) \subset \mathbb{A}^2$ e sia $\pi : \widetilde{\mathbb{A}^2} \to \mathbb{A}^2$ lo scoppiamento di $\mathbb{A}^2$ nell'origine. Dimostrare che la trasformata stretta $\widetilde{C_n}$ di C_n tramite π è isomorfa a C_{n-1}. Dedurne che C_n può essere risolta con una catena di n scoppiamenti.