ESAME DI ANALISI FUNZIONALE
A.A. 2016/17

20.02.2017

NOME E COGNOME:______________________________

MATRICOLA:______________________________

Esercizio 1. Sia $T : C([-1,1]) \to \mathbb{R}$ il seguente funzionale lineare

$$(Tf)(x) = \int_{-1}^{1} g(x)f(x)\,dx$$

dove g è la funzione

$$g(x) = \begin{cases} -1 & \text{if } -1 \le x < \frac{1}{3} \\ 1 & \text{if } \frac{1}{3} \le x < 1. \end{cases}$$

(1) Dimostrare che T è un funzionale continuo. [5]
(2) Calcolare la norma di T. [5]

Sozione.
Per dimostrare che T è continuo basta mostare che è limitato.

$$\begin{aligned} |Tf| &= \left| \int_{-1}^{1} g(x)f(x)\,dx \right| \\ &\le \sup_{x\in[-1,1]} |f(x)| \int_{-1}^{1} |g(x)|\,dx \\ &= 2\|f\|_\infty. \end{aligned}$$

Quindi abbiamo appena dimostrato che T è limitato e che vale la seguente stima per la norma operatoriale

$$\|T\| = \sup_{f\in C, f\neq 0} \frac{|Tf|}{\|f\|_\infty} \le 2.$$

Per calcolare la norma di T consideriamo la sequenza

$$f_n(x) = \begin{cases} -1 & \text{if } -1 \le x < \frac{1}{3} - \frac{1}{n}, \\ nx - \frac{n}{3} & \text{if } \frac{1}{3} - \frac{1}{n} \le x \le \frac{1}{3} + \frac{1}{n}, \\ 1 & \text{if } \frac{1}{3} + \frac{1}{n} < x \le 1. \end{cases}$$

Quindi

$$\|f_n\|_\infty = 1,$$

e

$$|Tf_n| = \left| 2 - \frac{2}{n} \right|.$$

Prendendo il limite per $n \to +\infty$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|Tf_n|}{\|f_n\|_\infty} = 2,$$

e quindi $\|T\| = 2$.

Esercizio 2. Sia $\{f_n\}_n$ la successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{x^2}{1+x^2}\chi_{[n,n+1]}(x) \qquad x \in (0,\infty).$$

Dimostrare che

(1) $f_n \to 0$ quasi ovunque in $(0,\infty)$, [1]
(2) $\{f_n\}_n$ è uniformente limitata in $L^p(0,+\infty)$ per $p \in [1,+\infty)$, [1]
(3) $\{f_n\}_n$ non converge forte a 0 in $L^p(0,+\infty)$ per $p \in [1,+\infty)$, [2]
(4) $\{f_n\}_n$ converge debole a 0 in $L^p(0,+\infty)$ quando $p \in (1,+\infty)$, [3]
(5) $\{f_n\}_n$ non converge debole a 0 in $L^1(0,+\infty)$. [3]

Soluzione.
(1) Per ogni $x \in (0,\infty)$ esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $n > x$. Quindi la convergenza quasi ovunque segue facilmente.
(2) Sia $p \in [1,\infty)$. Allora,

$$\|f_n\|_p^p = \int_n^{n+1} \left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^p dx \le \int_n^{n+1} dx = 1.$$

(3) Non ci può essere convergenza forte a 0 in L^p poichè

$$\|f_n\|_p^p = \int_n^{n+1} \left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^p dx \ge \left(\frac{n^2}{1+n^2}\right)^p \to 1 \text{ per } n \to +\infty.$$

È stato usato che la funzione $\frac{x^2}{1+x^2}$ è crescente in $[0,\infty)$ e l'intervallo $[n,n+1]$ ha misura 1.
(4) Per dimostrare la convergenza debole $L^p(0,\infty)$ per $p \in (1,\infty)$ dobbiamo provare che per ogni $\phi \in L^q(1,\infty)$ con $q = p/(p-1)$ si ha che

$$\left|\int_0^\infty f_n(x)\phi(x)\,dx\right| \to 0 \quad n \to \infty. \tag{1}$$

Notiamo che se $p > 1$ allora $q < \infty$. Quindi

$$\left|\int_0^\infty f_n(x)\phi(x)\,dx\right| \le \int_0^\infty (\chi_{[n,n+1]}(x))^{1-\frac{1}{p}}(\chi_{[n,n+1]}(x))^{\frac{1}{p}}\phi(x)\,dx$$

$$\le \left(\int_0^\infty \chi_{[n,n+1]}(x)|\phi(x)|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

dove si è usata la disuguaglianza di Hölder e il punto (3). Considerando la sequenza $\phi_n(x) = \chi_{[n,n+1]}(x)|\phi(x)|^q$ si ha che

- $\phi_n \to 0$ quasi ovunque in $(0,\infty)$.
- $|\phi_n| \le |\phi|^q \in L^1(0,\infty)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ quasi ovunque in $(0,\infty)$.

quindi usando il Teorema della Convergenza Dominata (1) segue.
(5) Per dimostare che f_n non converge debole in $L^1(0,\infty)$ basta esibire $\phi \in L^\infty(0,\infty)$ tale che

$$\int_0^1 f_n(x)\phi(x)\,dx \nrightarrow 0. \tag{2}$$

Prendendo $\phi = 1$ e notando che f_n è positiva, usando gli stessi argomenti del punto (3) si vede facilmente che vale (2).

Esercizio 3. Sia T il seguente operatore

$$T : l^2 \to l^2,$$
$$(Tx)_n = \frac{x_n}{2^n}.$$

(1) Dimostrare che T è continuo. [2]
(2) Verificare se T è compatto. [4]
(3) Calcolare gli eventuali autovalori e determinare lo spettro. [4]

Solution.
1) Sia $x \in l^2$, allora

$$\begin{aligned}\|Tx\|_2^2 &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{x_n^2}{4^n} \\ &\leq \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n^2 \\ &= \|x\|_2^2.\end{aligned}$$

2) T è compatto. Infatti T è limite di operatori di rango finito nella norma degli operatori. Consideriamo l'operatore

$$T_N = \begin{cases}(Tx)_n & \text{if } n \leq N \\ 0 & \text{if } n > N,\end{cases}$$

Notiamo che T_N è un operatore di rango finito e quindi compatto. Inoltre,

$$\begin{aligned}\|T - T_N\|^2 &= \sup_{\|x\|_2\leq 1} \|Tx - T_n x\|_2^2 \\ &\leq \sum_{n>N} \frac{1}{4^n}\end{aligned}$$

Poichè la serie geometrica é convergente si ha che

$$\|T - T_N\| \to 0 \text{ as } N \to \infty.$$

3) Poichè T è compatto per il Teorema di Schauder abbiamo che

$$\sigma(T) = \{0\} \cup \sigma_p(T)$$

e $\sigma_p(T)$ è numerabile. Sia $\lambda \in \mathbb{R}$, allora $\lambda \in \sigma_p(T)$ se esiste $x \neq 0$ soluzione di

$$Tx = \lambda x, \tag{3}$$

cioè per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{x_n}{2^n} = \lambda x_n.$$

Segue che $\lambda_n = \frac{1}{2^n}$ sono autovalori e gli autovettori relativi a λ_n sono $e^n = \{e_j^n\}_{j\in\mathbb{N}} = \{\delta_{j,n}\}_{j\in\mathbb{N}}$. Per concludere,

$$\sigma(T) = \{0\} \cup \left\{\frac{1}{2^n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}.$$