Esercizi di Matematica di Base

Scienze biologiche e Scienze e Tecnologie dell'Ambiente

Esercizio 1

Dati i vettori di $\mathbb{R}^3$

$$\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix},$$

- (i) Calcolare il prodotto scalare $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w}$,
- (ii) Stabilire se $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ sono ortogonali,
- (ii) Stabilire se $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ sono paralleli,
- (iv) Trovare un vettore di $\mathbb{R}^3$ che sia ortogonale sia a $\overrightarrow{v}$ che a $\overrightarrow{w}$

Soluzione:

Il prodotto scalare tra $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ è dato da

$$\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w} = 2 \cdot 0 + 3 \cdot (-1) + 0 \cdot \frac{3}{5} = -3 \,.$$

Dato che il prodotto scalare tra i due vettori è diverso da zero, i due vettori *non sono ortogonali tra loro*. D'altra parte, essi non sono neanche paralleli: infatti, imporre che $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ siano paralleli significa che esistono due scalari $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ *non entrambi nulli* tali che

$$\lambda \overrightarrow{v} + \mu \overrightarrow{w} = 0 \,,$$

e questo si traduce nella condizione

$$\lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix} = 0 \,,$$

la quale, epressa componente per componente, implica le tre condizioni

$$2\lambda = 0$$

$$3\lambda - \mu = 0$$

$$\frac{3}{5}\mu = 0,$$

e la prima e la terza condizione danno $\mu = \lambda = 0$. Pertanto, supponendo che $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ siano paralleli porta alla contraddizione che entrambi i coefficienti λ e μ siano nulli. Questo conclude il punto (iii).

Per rispondere alla domanda (iv), cerchiamo un vettore

$$\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

che soddisfi le seguenti due condizioni:

$$0 = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 2x + 3y, \tag{1}$$

e

$$0 = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w} = -y + \frac{3}{5}z. \tag{2}$$

Le due condizioni (1) e (2) esprimono l'ortogonalità a $\overrightarrow{v}$ e a $\overrightarrow{w}$ rispettivamente. Esse devono essere soddisfatte simultaneamente. Pertanto, (1) e (2) vanno messe a sistema come segue:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ -y + \frac{3}{5}z = 0\,. \end{cases} \tag{3}$$

Tale sistema esprime l'intersezione di due piani passanti per l'origine. Tali due piani evidentemente non sono paralleli tra loro. Infatti, il piano di equazione $2x + 3y = 0$ è il piano dei vettori ortogonali a $\overrightarrow{v}$, mentre il piano di equazione $-y + \frac{3}{5}z = 0$ è il piano dei vettori ortogonali a $\overrightarrow{w}$: se tali due piani fossero paralleli, allora lo sarebbero anche i due vettori $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$, ma questo non è vero per via del punto (iii).

Dato che i due piani in questione non sono paralleli, la loro intersezione è necessariamente data da una retta. Il sistema (3) esprime tale retta in forma Cartesiana. Tutti i punti di tale retta soddisfano alla condizione richiesta dal punto (iv), ovvero essi sono tutti ortogonali sia a $\overrightarrow{v}$ che a $\overrightarrow{w}$. Basta quindi sceglierne uno caso tra questi. Scegliamo ad esempio la coordinata $z = 1$. La seconda equazione in (3) darà quindi $y = \frac{3}{5}$, e di conseguenza la prima equazione in (3) dà $x = -\frac{9}{10}$. Pertanto, una possibile risposta alla domanda (iv) è

$$\begin{pmatrix} -\frac{9}{10} \\ \frac{3}{5} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 2

Dato il sistema lineare

$$
(4) \qquad \begin{cases} -x+2y-z=0 \\ y-4z=3 \\ x-3y+\lambda z=1 \end{cases},
$$

discutere la risolubilità del sistema al variare del parametro $\lambda \in \mathbb{R}$.

Soluzione:

Il sistema (4) si può scrivere nella forma matriciale

$$
A \begin{pmatrix} x \\ y \\ y \end{pmatrix} = \overrightarrow{b},
$$

con

$$
A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -4 \\ 1 & -3 & \lambda \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.
$$

Calcoliamo il determinante di A sviluppandolo lungo la prima colonna:

$$
\begin{aligned}
\det A &= -1 \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -3 & \lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} \\
&= -(\lambda - 12) + (-8+1) = -\lambda + 5 .
\end{aligned}
$$

Pertanto, se $\lambda \neq 5$ si ha $\det A \neq 0$, ovvero la matrice A è invertibile ed il suo rango è pari a 3. Il rango della matrice completa $(A|b)$ è quindi anch'esso uguale a 3 (A stessa, presa come sottomatrice di $(A|b)$, fornisce un minore non nullo di ordine 3 della matrice completa $(A|b)$). Pertanto, il Teorema di Rouché-Capelli assicura che il sistema ha una soluzione. Inoltre, tale soluzione sarà unica, visto che la dimensione dell'insieme delle soluzioni è pari all'ordine del sistema (uguale in questo caso a 3) meno il rango di A (anch'esso uguale a 3). Pertanto, la dimensione dell'insieme delle soluzioni è nulla, e tale insieme è dato da un solo punto nello spazio.

Nel caso in cui $\lambda = 5$, il rango di A è pari a 2. Per capire se il sistema ha soluzioni, bisogna capire se la matrice completa $(A|b)$ ha rango 2 o no. Consideriamo la matrice costituita dalle prime due colonne di A e avente $\overrightarrow{b}$ come terza colonna, e calcoliamone il determinante (sviluppato lungo la prima riga, omettiamo alcuni passaggi):

$$\det \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} = -10 + 6 = -4 \neq 0\,.$$

Pertanto, tale matrice ha rango 3, ed il Teorema di Rouché-Capelli implica che il sistema non ha soluzione.

Esercizio 3

Risolvere i seguenti sistemi lineari

$$(1) \quad \begin{cases} 3x - 4y = 0 \\ x + 7y = -2 \end{cases}$$

Soluzione: Per sostituzione si ha

$$x = -2 - 7y,$$

che sostituito alla prima riga dà

$$0 = 3(-2 - 7y) - 4y = -6 - 21y - 4y = -6 - 25y\,,$$

il che implica

$$y = -\frac{6}{25}\,, \quad x = -2 + 42/25 = (-50 + 42)/25 = -8/25\,.$$

$$(2) \quad \begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + 3y - 4z = 5 \\ y - 6z = -2 \end{cases}$$

Soluzione: Per sostituzione si ha

$$y = 6z - 2$$

che sostituito alla prima e alla seconda equazione dà

$$x + 3(6z - 2) - 4z = 5\,, \quad x - (6z - 2) + z = 0\,,$$

ovvero

$$x + 14z = 11\,, \quad x - 5z = -2\,.$$

Sottraendo tra di loro le equazioni appena ottenute si ha:

$$19z = 13\,, \qquad z = \frac{13}{19}\,.$$

Sostituendo ad una delle due equazioni si ha

$$x = 5z - 2 = 5 \cdot \frac{13}{19} - 2 = (65 - 38)/19 = 27/19\,,$$

ed infine

$$y = 6 \cdot \frac{13}{19} - 2 = \frac{78}{19} - 2 = \frac{40}{19}\,.$$