Corso di Laurea in Informatica

Metodi Formali dell'Informatica (a.a. 2001-02)

Esercizi di Riscrittura

Monica Nesi

Terminazione

Esercizio T1. Dato il sistema di riscrittura R:

$$\begin{array}{rcl} h(z, g(x, y)) & \to & g(k(x), h(z, y)) \\ g(k(x), k(y)) & \to & k(g(x, y)) \end{array}$$

determinare un ordinamento sugli operatori $\{g, h, k\}$ tale che il sistema R risulti terminante rispetto all'rpo basato su tali precedenze. Motivare la risposta.

Esercizio T2. Data una segnatura $\Sigma = \{a, f, g\}$, orientare le equazioni

$$\begin{array}{rcl} f(w, g(f(a, x), f(a, y))) & = & g(f(w, x), f(w, y)) \\ g(f(a, g(x, y)), f(a, y)) & = & g(f(a, y), x) \\ f(a, g(g(f(w, x), f(w, y)), z)) & = & g(f(w, x), f(a, g(f(w, y), z))) \end{array}$$

in modo tale che il sistema di riscrittura risultante sia terminante rispetto ad un rpo basato sulla precedenza $f > g$. Giustificare la risposta.

Esercizio T3. Data una segnatura $\Sigma = \{a, f, g, k\}$, orientare le equazioni

$$\begin{array}{rcl} g(x, f(g(a, f(y, z)), y)) & = & g(x, f(y, z)) \\ g(f(x, y), z) & = & f(x, g(y, z)) \\ g(k(x), f(y, x)) & = & k(f(x, y)) \end{array}$$

in modo tale che il sistema di riscrittura risultante sia terminante rispetto ad un rpo basato sulle precedenze $k > g > f$. Giustificare la risposta.

Esercizio T4. Sia dato il sistema di riscrittura R su una segnatura $\Sigma = \{f, g, h, k\}$:

$$\begin{array}{rcl} k(h(x)) & \to & h(k(x)) \\ k(g(x)) & \to & h(h(g(x))) \\ f(h(x)) & \to & f(k(x)) \end{array}$$

Mostrare che non esiste alcun ordinamento sugli operatori in Σ tale che R sia terminante rispetto all'rpo basato su tale ordinamento.

Esercizio T5. Data una segnatura $\Sigma = \{f, g, h, k\}$, orientare le equazioni

$$
\begin{aligned}
f(x, g(x, g(h(y), h(z))), g(z, y)) &= f(x, g(z, y), h(g(y, z))) \\
k(x, y) &= g(x, h(y)) \\
g(h(x), k(h(x), h(y))) &= k(x, h(y))
\end{aligned}
$$

in modo tale che il sistema di riscrittura risultante sia terminante rispetto ad un rpo basato sulle precedenze $k > g > h$. Giustificare la risposta.

Esercizio T6. Data una segnatura $\Sigma = \{f, g, h, k\}$, orientare le equazioni

$$
\begin{aligned}
f(g(x, y), h(g(x, y))) &= g(x, h(y)) \\
g(f(g(x, f(y, z)), x), y) &= g(f(x, y), z) \\
g(k(x, z), k(z, y)) &= k(z, g(x, y))
\end{aligned}
$$

in modo tale che il sistema di riscrittura risultante sia terminante rispetto ad un rpo basato sulle precedenze $h > g > f$ e $k > g$. Giustificare la risposta.

Esercizio T7. Data una segnatura $\Sigma = \{f, g, h\}$, orientare le equazioni

$$
\begin{aligned}
f(z, g(h(x), h(y))) &= g(h(f(z, x)), h(f(z, y))) \\
f(h(g(x, y)), h(g(y, x))) &= g(h(x), h(y)) \\
h(g(h(x), h(y))) &= h(h(f(x, y)))
\end{aligned}
$$

in modo tale che il sistema di riscrittura risultante sia terminante rispetto ad un rpo $\succ_{rpo}$ basato sulle precedenze $h > g > f$. Giustificare la risposta.

Esercizio T8. Data una segnatura $\Sigma = \{f, g, k\}$, orientare le equazioni

$$
\begin{aligned}
g(x, k(f(y), f(z))) &= k(f(g(x, y)), f(g(x, z))) \\
f(k(f(y), f(z))) &= f(f(g(z, y)))
\end{aligned}
$$

in modo tale che il sistema di riscrittura risultante sia terminante rispetto ad un rpo basato sulle precedenze $f > k > g$. Giustificare la risposta.

Esercizio T9. Data una segnatura $\Sigma = \{f, g, h, k\}$, orientare le equazioni

$$
\begin{aligned}
h(x, y) &= f(k(x), y) \\
f(g(y, x), k(y)) &= k(g(y, x)) \\
f(g(x, z), g(z, y)) &= g(z, f(x, y))
\end{aligned}
$$

in modo tale che il sistema di riscrittura risultante sia terminante rispetto ad un rpo basato sulle precedenze $g > f$ e $h > k > f$. Giustificare la risposta.

Esercizio T10. Dato il sistema di riscrittura R:

$$\begin{array}{rcl} f(g(x,y),x) & \rightarrow & g(h(x,y),k(y)) \\ g(k(x),f(x,y)) & \rightarrow & k(f(x,y)) \end{array}$$

determinare un ordinamento sugli operatori $\{f,g,h,k\}$ tale che il sistema R risulti terminante rispetto all'rpo basato su tale ordinamento. Giustificare la risposta.

Esercizio T11. Dato il sistema di riscrittura R:

$$\begin{array}{rcl} f(x,y) & \rightarrow & g(k(x),y) \\ g(f(k(x),k(y)),k(x)) & \rightarrow & f(k(y),x) \end{array}$$

determinare un ordinamento sugli operatori $\{f,g,k\}$ tale che R risulti terminante rispetto all'rpo basato su tale ordinamento. Giustificare la risposta.

Esercizio T12. Sia dato il seguente sistema di riscrittura R:

$$\begin{array}{rcl} k(h(x,y)) & \rightarrow & f(x,y) \\ f(k(x),y) & \rightarrow & g(k(f(x,y)),f(x,y)) \\ h(f(x,z),y) & \rightarrow & f(h(x,y),h(y,z)) \end{array}$$

Determinare un ordinamento sugli operatori $\{f,g,h,k\}$ tale che R risulti terminante rispetto all'rpo basato su tale ordinamento. Giustificare la risposta.

Esercizio T13. Determinare se esiste un ordinamento sugli operatori $\{f,g,h\}$ tale che il seguente sistema:

$$\begin{array}{rcl} f(x,g(h(y),h(z))) & \rightarrow & g(h(f(x,y)),h(f(x,z))) \\ h(g(h(x),h(y))) & \rightarrow & h(h(f(x,y))) \end{array}$$

risulti terminante rispetto all'rpo basato su tale ordinamento. Giustificare la risposta.

Esercizio T14. Sia dato il seguente sistema di riscrittura R sulla segnatura $\Sigma = \{a,f,g,h\}$:

$$\begin{array}{rcl} g(a,x) & \rightarrow & x \\ g(h(x),y) & \rightarrow & h(g(x,y)) \\ f(a) & \rightarrow & a \\ f(h(a)) & \rightarrow & h(a) \\ f(h(h(x))) & \rightarrow & g(f(x),f(h(x))) \end{array}$$

Determinare un ordinamento sui termini rispetto al quale R risulti terminante. Giustificare la risposta.

Esercizio T15. Sia dato il seguente sistema di riscrittura R su una segnatura Σ tale che $f \in \Sigma$:

$$\begin{array}{rcl} f(f(x,y),z) & \rightarrow & f(x,z) \\ f(x,f(y,z)) & \rightarrow & f(x,z) \end{array}$$

Determinare un ordinamento sui termini rispetto al quale il sistema di riscrittura R risulti terminante.

Confluenza, Coppie Critiche, Completamento

Esercizio C1. Sia data la seguente teoria equazionale E su una segnatura $\Sigma = \{a, b, f, g\}$:

$$\begin{array}{rcl} f(x,x) & = & x \\ g(b,x) & = & x \\ f(g(x,a),a) & = & g(x,a) \\ g(z,f(x,y)) & = & f(g(z,x),g(z,y)) \end{array}$$

i) Completare E rispetto ad un rpo basato sulla precedenza $f > g$.
ii) Dati i termini ground $t_1 = g(b, f(g(b,a), g(b, f(a,a))))$ e $t_2 = f(f(a,a), g(b,a))$, decidere se $t_1 =_E t_2$ utilizzando il sistema di riscrittura ottenuto al punto i).
iii) Si modifichi la precedenza tra gli operatori data al punto i), ponendo $g > f$. Verificare che il completamento di E rispetto al nuovo rpo diverge.

Esercizio C2. Data una segnatura $\Sigma = \{I, *\}$, sia E la seguente teoria equazionale costituita dal solo assioma:

$$I(x) * (x * y) \;=\; y$$

Completare E rispetto ad un rpo basato sulla precedenza $I > *$, motivando i vari passi della procedura di completamento ed il risultato ottenuto.

Esercizio C3. Sia dato il sistema di riscrittura R su una segnatura $\Sigma = \{a, f, g\}$:

$$\begin{array}{rcl} f(f(x,y),z) & \rightarrow & f(x,f(y,z)) \\ f(g(x,y),z) & \rightarrow & g(f(x,z),f(y,z)) \\ g(y,y) & \rightarrow & y \\ f(a,x) & \rightarrow & x \end{array}$$

Verificare che R è localmente confluente.

Esercizio C4. Sia dato il sistema di riscrittura R su una segnatura $\Sigma = \{a, b, f, g\}$:

$$f(x,a) \;\rightarrow\; x$$

$$
\begin{array}{rcl}
f(a,x) & \to & x \\
f(x,x) & \to & x \\
g(x,g(b,y)) & \to & g(x,y) \\
g(a,f(g(b,x),x)) & \to & g(a,x)
\end{array}
$$

Verificare che R è localmente confluente.

Esercizio C5. Sia data la seguente teoria equazionale E su una segnatura $\Sigma = \{f, g, h\}$:

$$
\begin{array}{rcl}
f(x,g(x,y)) & = & g(x,y) \\
f(x,x) & = & x \\
g(x,x) & = & x \\
g(h(x),h(y)) & = & g(x,y)
\end{array}
$$

Completare E rispetto ad un qualsiasi rpo.

Esercizio C6. Sia data la seguente teoria equazionale E sulla segnatura $\Sigma = \{f, g, h, k\}$:

$$
\begin{array}{rcl}
f(g(x,y)) & = & h(x,y) \\
g(k(x),y) & = & k(g(x,y))
\end{array}
$$

Mostrare che il completamento di E, rispetto ad un rpo basato sulle precedenze $g > k > f > h$, diverge ed individuare il pattern di divergenza.

Esercizio C7. Sia data la seguente teoria equazionale E su una segnatura $\Sigma = \{a, f, g\}$:

$$
\begin{array}{rcl}
f(x,x) & = & x \\
g(x,a) & = & x \\
g(a,x) & = & x \\
g(x,x) & = & x \\
f(x,g(y,x)) & = & g(x,f(x,y)) \\
g(f(x,y),x) & = & f(x,g(x,y))
\end{array}
$$

Completare E rispetto ad un rpo basato sulla precedenza $g > f$.

Esercizio C8. Sia data la seguente teoria equazionale E sulla segnatura $\Sigma = \{a, f, g\}$:

$$
f(g(f(x),a)) = f(g(x,a))
$$

Mostrare che il completamento di E (rispetto ad un qualsiasi rpo) diverge ed individuare il pattern di divergenza.

Esercizio C9. Sia data la seguente teoria equazionale E sulla segnatura $\Sigma = \{c, f, g\}$:

$$g(f(g(x,c)),c) \;=\; f(g(x,c))$$

Mostrare che il completamento di E (rispetto ad un qualsiasi ordinamento di semplificazione) diverge ed individuare il pattern di divergenza.

Esercizio C10. Sia data la seguente teoria equazionale E su una segnatura $\Sigma = \{f, g\}$:

$$\begin{aligned} g(x,x) &= x \\ f(x,g(y,z)) &= f(x,z) \\ g(g(x,y),z) &= g(x,z) \\ g(x,g(y,z)) &= g(x,z) \end{aligned}$$

Verificare che il sistema di riscrittura ottenuto orientando le equazioni di E rispetto ad un qualsiasi rpo è canonico.

Esercizio C11. Sia data la seguente teoria equazionale E su una segnatura $\Sigma = \{a, b, f, g\}$:

$$\begin{aligned} f(f(x,a),y) &= f(x,y) \\ g(x,f(b,z)) &= f(x,z) \\ f(y,g(b,z)) &= f(y,z) \end{aligned}$$

Verificare che il sistema di riscrittura, ottenuto orientando le equazioni di E rispetto ad un rpo $\succ_{rpo}$ basato sulla precedenza $g > f$, è canonico.

Esercizio C12. Sia data la teoria equazionale E sulla segnatura $\Sigma = \{e, f, g\}$:

$$\begin{aligned} f(x,x) &= e \\ f(g(x),y) &= g(f(x,y)) \end{aligned}$$

Mostrare che il completamento di E (rispetto ad un rpo $\succ_{rpo}$ basato sulle precedenze $f > g > e$) diverge ed individuare il pattern di divergenza.

Esercizio C13. Sia dato il sistema di riscrittura R su una segnatura $\Sigma = \{a, f, g\}$:

$$\begin{aligned} f(a,x) &\to x \\ f(x,a) &\to x \\ f(z,g(x,y)) &\to g(f(z,x),f(z,y)) \\ f(x,f(y,z)) &\to f(f(x,y),z) \end{aligned}$$

Verificare che R è localmente confluente.

Esercizio C14. Sia data la teoria equazionale E sulla segnatura $\Sigma = \{f, g, h\}$:

$$\begin{array}{rcl} f(h(x), y) & = & h(f(x, y)) \\ g(x, f(x, y)) & = & g(x, y) \end{array}$$

Mostrare che il completamento di E (rispetto ad un rpo $\succ_{rpo}$ basato sulla precedenza $f > h$) diverge ed individuare il pattern di divergenza.

Esercizio C15. Sia data la teoria equazionale E su una segnatura $\Sigma = \{f, g\}$:

$$\begin{array}{rcl} g(f(x, y), f(x, z)) & = & f(x, g(y, z)) \\ g(x, x) & = & x \\ f(x, x) & = & x \end{array}$$

Completare E rispetto ad un rpo $\succ_{rpo}$ basato sulla precedenza $g > f$.

Esercizio C16. Sia dato il sistema di riscrittura R sulla segnatura $\Sigma = \{a, f\}$:

$$\begin{array}{rcl} f(x, x) & \rightarrow & x \\ f(f(x, y), a) & \rightarrow & f(x, f(y, a)) \end{array}$$

Mostrare che il completamento di R (rispetto ad un qualsiasi ordinamento di semplificazione) diverge, calcolando almeno le prime due regole della catena di divergenza.

Esercizio C17. Sia dato il sistema di riscrittura R su una segnatura Σ tale che $f \in \Sigma$:

$$\begin{array}{rcl} f(f(x, y), z) & \rightarrow & f(x, z) \\ f(x, f(y, z)) & \rightarrow & f(x, z) \end{array}$$

Determinare un ordinamento sui termini rispetto al quale il sistema di riscrittura R risulti terminante. Quindi verificare che R è confluente.

Esercizio C18. Sia dato il sistema di riscrittura R sulla segnatura $\Sigma = \{f, g\}$:

$$\begin{array}{rcl} f(g(x), f(x, y)) & \rightarrow & y \\ f(f(y, x), g(x)) & \rightarrow & y \\ g(f(x, y)) & \rightarrow & f(g(y), g(x)) \\ g(g(x)) & \rightarrow & x \end{array}$$

i) Determinare un ordinamento sui termini tale che R sia terminante rispetto a tale ordinamento.
ii) Calcolare almeno 8 delle coppie critiche generate durante il completamento di R rispetto all'ordinamento determinato al punto i).

Narrowing, E-unificazione

Esercizio E1. Sia R il seguente sistema canonico che descrive una teoria equazionale E sulla segnatura $\Sigma = \{a, f, g, h\}$:

$$\begin{array}{rcl} f(a,x) & \to & a \\ f(h(x),y) & \to & g(y, f(x,y)) \\ g(h(a),x) & \to & h(x) \end{array}$$

Risolvere modulo E l'equazione $f(x,y) = h(a)$ utilizzando l'algoritmo di E-unificazione basato su narrowing, basilare e normale. Dare l'albero delle derivazioni di narrowing fermandosi alla prima soluzione trovata.

Esercizio E2. Sia R il seguente sistema canonico che descrive una teoria equazionale E sulla segnatura $\Sigma = \{a, f, g, h, k\}$:

$$\begin{array}{rcl} g(a,x) & \to & a \\ g(h(x),y) & \to & f(k(y), g(x,y)) \\ k(a) & \to & a \end{array}$$

Risolvere modulo E l'equazione $g(x,y) = k(y)$ utilizzando l'algoritmo di E-unificazione basato su narrowing, basilare e normale. Dare l'albero completo delle derivazioni di narrowing.

Esercizio E3. Sia R il seguente sistema canonico che descrive una teoria equazionale E sulla segnatura $\Sigma = \{b, f, k\}$:

$$\begin{array}{rcl} f(x,b) & \to & x \\ f(x,k(y)) & \to & k(f(x,y)) \end{array}$$

Risolvere modulo E l'equazione $f(k(x),y) = k(y)$ tramite l'algoritmo di E-unificazione basato su narrowing, basilare e normale. Dare l'albero completo delle derivazioni di narrowing.

Esercizio E4. Sia R il seguente sistema canonico che descrive una teoria equazionale E sulla segnatura $\Sigma = \{a, f, g, h\}$:

$$\begin{array}{rcl} h(h(x)) & \to & x \\ g(f(x),y) & \to & f(g(x,y)) \\ g(a,x) & \to & x \end{array}$$

Risolvere modulo E l'equazione $g(x, f(h(y))) = f(x)$ utilizzando l'algoritmo di E-unificazione basato su narrowing, basilare e normale. Dare l'albero completo delle derivazioni di narrowing.

Esercizio E5. Sia R il seguente sistema canonico che descrive una teoria equazionale E sulla segnatura $\Sigma = \{e, f, g, h\}$:

$$\begin{array}{rcl} h(x, g(y)) & \rightarrow & f(h(x, y), x) \\ h(x, e) & \rightarrow & x \\ f(e, x) & \rightarrow & g(x) \end{array}$$

Risolvere modulo E l'equazione $h(x, y) = g(x)$ tramite l'algoritmo di E-unificazione basato su narrowing, basilare e normale. Dare l'albero completo delle derivazioni di narrowing.

Esercizio E6. Sia dato il seguente sistema R che descrive una teoria equazionale E sulla segnatura $\Sigma = \{a, f, g\}$:

$$\begin{array}{rcl} g(x, a) & \rightarrow & f(x) \\ g(f(x), y) & \rightarrow & f(g(x, y)) \end{array}$$

i) Determinare un ordinamento sui termini tale che R sia terminante rispetto a tale ordinamento.
ii) Verificare che R è confluente.
iii) Risolvere modulo E l'equazione $f(x) = g(x, y)$ tramite l'algoritmo di E-unificazione basato su narrowing, basilare e normale. Dare l'albero completo delle derivazioni di narrowing.

Esercizio E7. Sia dato il seguente sistema R che descrive una teoria equazionale E sulla segnatura $\Sigma = \{a, f, g, h\}$:

$$\begin{array}{rcl} g(a, x) & \rightarrow & x \\ g(h(x), y) & \rightarrow & h(g(x, y)) \\ f(a) & \rightarrow & a \\ f(h(a)) & \rightarrow & h(a) \\ f(h(h(x))) & \rightarrow & g(f(x), f(h(x))) \end{array}$$

i) Determinare un ordinamento sui termini tale che R sia terminante rispetto a tale ordinamento.
ii) Verificare che R è confluente.
iii) Risolvere modulo E l'equazione $x = f(x)$ tramite l'algoritmo di E-unificazione basato su narrowing, basilare e normale. Dare l'albero completo delle derivazioni di narrowing.

Esercizio E8. Sia dato il seguente sistema R che descrive una teoria equazionale E sulla segnatura $\Sigma = \{e, f, g, h\}$:

$$\begin{array}{rcl} h(x, f(e)) & \rightarrow & f(x) \\ g(x, f(y)) & \rightarrow & h(g(x, y), x) \\ g(x, e) & \rightarrow & e \end{array}$$

i) Determinare un ordinamento sui termini tale che R sia terminante rispetto a tale ordinamento.
ii) Verificare che R è confluente.
iii) Risolvere modulo E l'equazione $g(x, y) = y$ tramite l'algoritmo di E-unificazione basato su narrowing, basilare e normale. Dare l'albero completo delle derivazioni di narrowing.

Riduzione

Esercizio R1. Provare che se per ogni $t, s, u \in T_\Sigma(V)$ tale che $s \leftarrow t \stackrel{*}{\rightarrow} u$ implica che esiste $t' \in T_\Sigma(V)$ tale che $s \stackrel{*}{\rightarrow} t' \stackrel{*}{\leftarrow} u$, allora la relazione di riduzione $\rightarrow$ è Church-Rosser.

Esercizio R2. Dimostrare che un sistema di riduzione astratto $< A, \rightarrow >$ è confluente se esiste un sistema di riduzione astratto confluente $< A, \rightarrow_1 >$ tale che $\rightarrow \subseteq \stackrel{*}{\rightarrow}_1 \subseteq \stackrel{*}{\rightarrow}$.

Esercizio R3. Una relazione di riscrittura $\rightarrow$ è *fortemente confluente* se $\leftarrow \circ \rightarrow \subseteq \stackrel{*}{\rightarrow} \circ \stackrel{=}{\leftarrow}$ (ovvero per ogni $t, t', t'' \in T_\Sigma(V)$ tale che $t' \leftarrow t \rightarrow t''$ si ha che esiste $s \in T_\Sigma(V)$ tale che $t' \stackrel{*}{\rightarrow} s \stackrel{=}{\leftarrow} t''$), dove $\stackrel{=}{\rightarrow} =_{\text{def}} \rightarrow \cup =$. Dimostrare che una relazione di riscrittura fortemente confluente è tale che $\leftarrow \circ \stackrel{*}{\rightarrow} \subseteq \stackrel{*}{\rightarrow} \circ \stackrel{=}{\leftarrow}$.

Esercizio R4. Sia data una relazione di riduzione $\rightarrow$ con la seguente proprietà: per ogni $t, s, u \in T_\Sigma(V)$ tale che $s \leftarrow t \rightarrow u$ si ha che esiste $t' \in T_\Sigma(V)$ tale che $s \rightarrow t' \stackrel{*}{\leftarrow} u$. Provare che per ogni $x, y, z \in T_\Sigma(V)$ tale che $y \stackrel{*}{\leftarrow} x \rightarrow z$ si ha che esiste $y' \in T_\Sigma(V)$ tale che $y \rightarrow y' \stackrel{*}{\leftarrow} z$.

Esercizio R5. Dato un sistema di riduzione astratto $< A, \rightarrow >$, la relazione $\rightarrow$ si dice *crescente* se esiste una funzione $|| : A \longrightarrow N$ tale che per ogni $a, b \in A$ si ha che $a \rightarrow b$ implica $|a| < |b|$, dove $<$ è l'ordinamento usuale sui numeri naturali N. Provare che se una relazione $\rightarrow$ è crescente, allora la sua inversa $\leftarrow$ è terminante.