Geometria B - C.d.L. in Matematica
Università dell'Aquila
Soluzione Geometria differenziale del 17 Gennaio 2017 - Barbara Nelli

Si pregano gli studenti di segnalare eventuali imprecisioni

Esercizio 1. 1. Fatto a lezione. Essendo la superficie compatta ha almeno un punto p_0 di massima distanza dall'origine. si dimostra che tale punto è ellittico ovvero ha curvatura di Gauss positiva..

2. Per il teorema di Gauss-Bonnet si ha $\int_\Sigma K = 0$. Per il punto 1, la superficie ha almeno un punto ellittico, e quindi un aperto di punti ellittici. Sia U tale aperto. Allora

$$0 = \int_\Sigma K = \int_U K + \int_{\Sigma \setminus U} K$$

Il secondo integrale è negativo, quindi ci sono dei punti su Σ in cui $K < 0$.

3. La risposta è no. Il controesempio è la parte del cilindro tra due piani ortogonali all'asse, ad esempio $\Sigma\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1,\ |z| \leq 1\}$. Σ ha caratteristica di Eulero zero e $K \equiv 0$.

4. Gauss Bonnet e $K(p) \geq 1$ implicano che

$$\text{area}(\Sigma) \leq \int_\Sigma K = 2\pi\chi(\Sigma) \leq 4\pi$$

Per ipotesi $\text{area}(\Sigma) \geq 4\pi$, quindi si ha $\text{area}(\Sigma) = 4\pi$. Allora le disuguaglianze di sopra sono tutte uguaglianze e quindi il genere di Σ è zero (ovvero Σ é topologicamente una sfera) e inoltre $K = 1$. Per il teorema di Minding, Σ è localmente isometrica ad una sfera di raggio 1.

Senza usare il teorema di Minding, si dimostra che Σ è una superficie con tutti punti ombelicali (questa parte è difficile).

Siano κ_1 e κ_2 le curvature principali di Σ. Scegliamole in modo che, in tutti i punti, $\kappa_1 \geq \kappa_2$. Poiché Σ è compatta, κ_1 ha un punto p di massimo in Σ. Il punto p è di minimo per κ_2. Si dimostra che p è ombelicale (vedi pagine 318 Do Carmo) ovvero $\kappa_1(p) = \kappa_2(p)$. Sia q un punto qualunque di Σ. Allora si ha

$$\kappa_1(p) \geq \kappa_1(q) \geq \kappa_2(q) \geq \kappa_2(p) = \kappa_1(p)$$

Quindi tutte le disuguaglianze precedenti sono uguaglianze e Σ è totalmente ombellicale. Poiché Σ è omeomorfa alla sfera ed ha curvatura $K = 1$, si ha che Σ è la sfera di raggio 1.

Esercizio 2. 1. Un semplice calcolo mostra che

$$\Gamma^1_{11} = \Gamma^2_{11} = \Gamma^1_{12} = \Gamma^2_{22} = 0, \quad \Gamma^2_{12} = \frac{u}{1+u^2}, \quad \Gamma^1_{22} = -\frac{u}{2}$$

2. La curva coordinata $t \longrightarrow \mathbf{x}(t, v)$ ha come tangente il vettore unitario $\mathbf{x}_u = u'\mathbf{x}_u + v'\mathbf{x}_v$, quindi $u' = 1$, $v' = 0$. Sostituendo nelle equazioni delle geodetiche si vede facilmente che sono soddisfatte. Infatti, in questo caso le equazioni delle geodetiche sono

$$u'' - \frac{u}{2}(v')^2 = 0$$
$$v'' + \frac{u}{1+u^2}u'v' = 0$$

3. Il campo tangente unitario alla curva è $w = \frac{\mathbf{x}_v}{\sqrt{1+u^2}}$. Notare che il denominatore è costante lungo la curva in questione quindi il parametro d'arco è $t = \sqrt{1+u^2}\ v$. Allora il valore algebrico della derivata covariante di tale vettore è

$$\left[\frac{Dw}{dt}\right] = \frac{1}{2\sqrt{EG}}\left\{G_u\frac{dv}{dt} - E_v\frac{dv}{dt}\right\} + \frac{d\varphi}{dt}$$

dove $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Sostituendo si ottiene $\frac{u}{1+u^2}$.