GEOMETRIA B 2016-17

BARBARA NELLI
A.A. 2016-17

1. Esercizi

Alcuni degli esercizi sono presi dal libro [1].

Esercizio 1.1. Sia $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizzata e sia $v \in \mathbb{R}^3$ un vettore fissato. Assumiamo che $\alpha'(t)$ sia ortogonale a v per ogni $t \in I$ e che $\alpha(0)$ sia ortogonale a v. Mostrare che $\alpha(t)$ è ortogonale a v per ogni $t \in I$.

Esercizio 1.2. Sia $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizzata tale che $\alpha'(t) \neq 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Mostrare che $|\alpha(t)|$ è una costante non nulla se e solo se $\alpha(t)$ é ortogonale ad $\alpha'(t)$ per ogni $t \in I$.

Esercizio 1.3. Data la curva $\gamma(t) = (t^2, \frac{t^3}{3} + t, \frac{t^3}{3})$, $t \in [-1, 2]$
(a) Determinare se t é il parametro d'arco.
(b) Calcolare l'espressione della lunghezza di γ (senza necessariamente calcolare l'integrale)

Esercizio 1.4. Sia data la parabola $\gamma(t) = (t, 3t^2)$, $t \in \mathbb{R}$. Determinare i punti di γ dove la curvatura é massima o minima.

Esercizio 1.5. Sia C la curva definita da $\gamma(t) = (t, \cos t^2, te^t)$, $t \in \mathbb{R}$.
(a) Dire se C é una curva regolare.
(b) Determinare la tangente alla curva C nel punto $P = (0, 1, 0)$,
(c) Determinare in quali punti della curva il piano otogonale al vettore tangente alla curva (piano normale alla curva) è parallelo all'asse z.

Esercizio 1.6. Sia data la curva $\gamma(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, e^t)$, $t \in \mathbb{R}$.
(a) Verificare che γ è una curva regolare e calcolare la lunghezza d'arco.
(b) Calcolare la lunghezza dell'arco parametrizzato dall'intervallo $[0, \pi]$.
(c) Calcolare il riferimento di Frénet della curva γ.

Esercizio 1.7. Sia data la curva $\gamma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t, t)$, $t \in \mathbb{R}$.
(a) Calcolare la lunghezza dell'arco della curva nel tratto tra $\gamma(-1)$ e $\gamma(1)$.
(b) Calcolare il riferimento di Frénet della curva γ.

Esercizio 1.8. Considerare la curva $\gamma(t) = (t - \cos t, 1 - \cos t, t)$, $t \in \mathbb{R}$.
(a) Dimostrare che la curva γ è contenuta in un piano e determinarlo.
(b) Calcolare la curvatura di γ ed il suo riferimento di Frénet nel punto $t = \pi$.

Esercizio 1.9. Data una funzione differenziabile $k(s)$, $s \in I$, $I \subset \mathbb{R}$, mostrare che la curva piana parametrizzata di curvatura $k(s)$ è data da

$$\alpha(s) = \left(\int \cos\theta(s) ds + a, \int \sin\theta(s) ds + b \right),$$

dove $\theta(s) = \int k(s)ds + \varphi$, e che la curva è determinata a meno di traslazione di vettore (a, b) e rotazione di angolo φ.

Esercizio 1.10. Considerare il seguente sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ \mid \ x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$$

(1) Mostrare che S è una superficie regolare.
(2) Determinare i piani tangenti ad S nei punti del tipo $(x, y, 0)$.
(3) Mostrare che tali piani tangenti sono parelleli all'asse z.

Esercizio 1.11. Considerare la curva del piano x-y parametrizzata da $\alpha(t) = (t+1, t^2+1)$, $t \in \mathbb{R}$.

(1) Scrivere una parametrizzazione della superficie S generata dalla rotazione dalla curva α del piano intorno all'asse y.
(2) Determinare i punti in cui S è una superficie regolare e quelli in cui non lo è .
(3) Nei punti in cui S è una superficie regolare, calcolare l'equazione del piano tangente ad S.

Esercizio 1.12. Sia S una superficie regolare e sia $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(p) = |p - p_0|^2$, ove $p \in S$ e p_0 è un punto fisso di $\mathbb{R}^3$. Mostrare che $df_p(w) = 2\langle w, (p - p_0)\rangle$ per ogni $w \in T_pS$.

Esercizio 1.13. Mostrare che

$$\mathbf{x}(u, v) = (u \sin\alpha \cos v, u \sin\alpha \sin v, u \cos\alpha)$$

$u \in (0, \infty)$, $v \in (0, 2\pi)$, $\alpha = cost$,
è una parametrizzazione del cono con angolo al vertice 2α. Provare inoltre che in questo intorno coordinato, la curva $\mathbf{x}(c\, e^{\frac{v \sin\alpha}{\tan\beta}}, v)$ con $c = cost$, $\beta = cost$ interseca le generatrici del cono ($v = cost$) lungo un angolo costante β.

Esercizio 1.14. Diciamo che le curve coordinate di una parametrizzazione formano un *reticolo di Tchebyshef* se le lunghezze dei lati opposti di qualunque quadrilatero da loro formato sono uguali. Mostrare che condizione necessaria e sufficiente perché ciò avvenga è che $\frac{\partial E}{\partial v} = \frac{\partial G}{\partial u}$.

Esercizio 1.15. Data la superficie di Enneper $\mathcal{E}$ parametrizzata da

$$\mathbf{x}(u, v) = (u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3} + vu^2, u^2 - v^2),$$

trovare i punti di autointersezione.

Esercizio 1.16. Considerare la superficie $\mathcal{S}$ parametrizzata da

$$\mathbf{X}(u, v) = (3u + v^2 + 1, 2u + v^2 - 1, -u + 2v) \qquad u,\ v \in \mathbb{R},$$

(1) Determinare la prima e la seconda forma fondamentale di $\mathcal{S}$.
(2) Calcolare la matrice associata al differenziale della mappa di Gauss di $\mathcal{S}$ rispetto alla base del piano tangente $\mathbf{X}_u$, $\mathbf{X}_v$.
(3) Determinare le direzioni principali in tutti i punti di $\mathcal{S}$.
(4) Calcolare la curvatura di Gauss K della superficie $\mathcal{S}$

Esercizio 1.17. Sia $\mathbf{x}(u, v)$ una superficie parametrizzata regolare e sia $\mathbf{N}(u, v)$ un suo vettore normale. La superficie parametrizzata da

$$\mathbf{y}(u, v) = \mathbf{x}(u, v) + \alpha N(u, v)$$

per α costante reale, si dice *superficie parallela* ad $\mathbf{x}$.

(1) Mostrare che

$$\mathbf{y}_u \wedge \mathbf{y}_v = (1 - 2Ha + Ka^2)(\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v)$$

dove K ed H sono la curvatura di Gauss e media di $\mathbf{x}$ rispettivamente.

(2) Nel caso in cui $\mathbf{x}$ sia minima, determinare la relazione tra K ed a affinché l'orientazione di $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ sia concorde, nei punti corrispondenti.

Esercizio 1.18. Sia S una superficie regolare e siano E, F, G i coefficienti della prima forma fondamentale di S. Sia $\mathbf{x}(u,v) : U \longrightarrow S$, ove $U \subset \mathbb{R}^2$, una parametrizzazione di S. Siano $\varphi(u,v) = cost$, $\psi(u,v) = cost$ due famiglie di curve regolari differenziabili in S.
(1) Dimostrare che, ogni volta che 2 curve di famiglie distinte (una del tipo $\varphi = cost$ e l'altra del tipo $\psi = cost$) si incontrano lungo un angolo uguale a $\frac{\pi}{2}$ se e solo se

$$E\varphi_v\psi_v - F(\varphi_u\psi_v + \varphi_v\psi_u) + G\varphi_u\psi_u = 0 \tag{1}$$

phi-psi

(2) Applicare la formula (1) alla superficie elicoide con le famiglie di curve

$$\varphi(u,v) = v\cos u,\ v \neq 0, \quad \psi(u,v) = (v^2 + a^2)\sin^2 u, \quad v \neq 0,\ u \neq \pi$$

(ricordiamo che una parametrizzazione dell'elicoide é $\mathbf{x} = (v\cos u, v\sin u, av)$.)

Esercizio 1.19. Descrivere le regioni della sfera coperte dall'immagine della mappa di Gauss delle superfici seguenti:

- Paraboloide di rivoluzione: $z = x^2 + y^2$.
- Iperboloide di rivoluzione: $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.
- Catenoide: $x^2 + y^2 = \cosh^2 z$.

Esercizio 1.20. Mostrare che se $\mathbf{x}$ è una parametrizzazione ortogonale di una superficie, ovvero $F = 0$, allora la curvatura di Gauss della superficie è

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}}\left[\left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}}\right)_v + \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}}\right)_u\right] \tag{2}$$

Esercizio 1.21. Sia $\mathbf{x}$ una parametrizzazione isoterma di una superficie, ovvero $F = 0$, $E = G = \lambda(u,v)$.

(1) Mostrare che la curvatura di Gauss della superficie è $K = -\frac{1}{2\lambda}\Delta(\log\lambda)$.
(2) Mostrare che, quando $E = G = (u^2 + v^2 + c)^{-2}$ e $F = 0$, allora $K = 4c$.

Esercizio 1.22. Mostrare che le superfici seguenti

$$\mathbf{x}(u,v) = (u\cos v, u\sin v, \log u), \quad \mathbf{y}(u,v) = (u\cos v, u\sin v, v) \tag{3}$$

hanno uguale curvatura di Gauss nei punti $\mathbf{x}(u,v)$ e $\mathbf{y}(u,v)$ ma la mappa $\mathbf{y}^{-1} \circ \mathbf{x}$ non è un'isometria.
Oss. L'esercizio mostra che il viceversa del teorema Egregium non è vero.

Esercizio 1.23. (1) Mostrare che non esiste una superficie parametrizzata da $\mathbf{x}(u,v)$ tale che $E = 1,\ F = 0,\ G = \cos^2 u,\ e = -g = 1,\ f = 0$.
(2) Dire se esiste una superficie parametrizzata da $\mathbf{x}(u,v)$ tale che $E = 1,\ F = 0,\ G = \cos^2 u$, $e = \cos^2 u,\ g = 1,\ f = 0$.

Esercizio 1.24. Calcolare i simboli di Christoffel del piano in coordinate cartesiane e in coordinate polari. Usare la formula di Gauss per calcolare la curvatura di Gauss con entrambe le parametrizzazioni.

Esercizio 1.25. Dire, giustificando la risposta se le seguenti superfici sono o no a due a due localmente isometriche: la catenoide, il piano, la sfera.

Esercizio 1.26. Sia $U = (0,1) \times (0,\pi)$ e sia $\mathbf{x} : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definita da

$$\mathbf{x}(u,v) = (u\cos v, u\sin v, \varphi(v)) \tag{4}$$

ove $(u,v) \in U$, e $\varphi \in C^\infty((0,\pi))$ è un omeomorfismo sull'immagine.

(1) Mostrare che la superficie S parametrizzata da $\mathbf{x}$ è regolare.
(2) Calcolare la curvatura di Gauss in tutti i punti di S.
(3) Dire se esiste un aperto di S isometrico ad un aperto del piano.
(4) Trovare, se possibile, le condizioni su φ affinché un punto di S sia ombelicale.

Esercizio 1.27. 1. Mostrare che se C è una curva su una superficie orientata che sia geodetica e linea di curvatura, allora C è una curva piana.
2. Mostrare che se C è una geodetica (non linea retta) piana, allora è una linea di curvatura.
3. Dare un esempio di una linea di curvatura che sia una curva piana ma non una geodetica.

Esercizio 1.28. Sia S una superficie regolare di $\mathbb{R}^3$ e $\mathbf{x}(u, v)$ una parametrizzazione locale ortogonale (F=0).

(1) Mostrare che la curvatura geodetica delle curve $u = cost$ é data da $\frac{1}{\sqrt{EG}} \frac{\partial G}{\partial u}$.
(2) Supponiamo che $E \equiv 1$. Mostrare che le curve $v = cost$ sono geodetiche.

Esercizio 1.29. Considerare la superficie di rotazione S ottenuta ruotando intorno all'asse z della curva $\alpha(t) = (3+2\cos t, 0, \sin t)$. Dato $a \in [-1, 1]$, sia γ_a la curva ottenuta intersecando S con il piano $z = a$.

(1) Calcolare la curvatura geodetica e la curvatura normale di γ_a, per ogni $a \in [-1, 1]$.
(2) Trovare i valori di a per i quali la curva γ_a é una geodetica e calcolare la lunghezza di γ_a in questi casi.
(3) Trovare i valori di a per i quali la curva γ_a ha curvatura normale identicamente nulla e calcolare la lunghezza di γ_a in questi casi.

Esercizio 1.30. Calcolare la curvatura geodetica e la curvatura normale dei paralleli del toro di rotazione para metrizzato da:

$$\mathbf{x}(u, v) = ((2 + \cos u) \cos v, (2 + \cos u) \sin v, \sin u), \quad u \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right), \quad v \in (0, 2\pi)$$

Esercizio 1.31. Sia $\mathbb{S}^2$ la sfera unitaria. Dato $\theta_0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$, siano $\sigma_1 : [0, \theta_0] \longrightarrow \mathbb{S}^2$, $\sigma_2, \sigma_3 : [0, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow \mathbb{S}^2$ le geodetiche

$$\begin{aligned} \sigma_1(s) &= (\cos s, \sin s, 0), \\ \sigma_2(s) &= (\cos\theta_0 \cos s, \sin\theta_0 \cos s, \sin s), \\ \sigma_3(s) &= (\sin s, 0, \cos s), \end{aligned}$$

e denotiamo con $\mathcal{T}$ il triangolo geodetico di lati σ_1, σ_2, σ_3.

(1) Calcolare l'area di T quando $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$.
(2) Calcolare l'area di T per qualunque $\theta_0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Esercizio 1.32. Considerare la funzione $f_t : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, definita da

$$f_t(x, y, z) = \frac{1}{t^2}x^2 + y^2 + z^2 - 1$$

dove $t > 0$ è un parametro reale positivo. Poniamo

$$\mathcal{S}_t = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f_t(x, y, z) = 0\}.$$

(1) Dimostrare che $\mathcal{S}_t \subset \mathbb{R}^3$ è una superficie regolare per ogni $t > 0$.
(2) Calcolare la prima e la seconda forma fondamentale di $\mathcal{S}_t$ nel punto $(t, 0, 0)$.
(3) Sia $D_t = \mathcal{S}_t \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y \geq 0\}$. Calcolare l'integrale della curvatura di Gauss su D_t.

Esercizio 1.33. Sia $\mathcal{M}$ una superficie regolare di curvatura di Gauss costante uguale a -1.
(a) Sia T un triangolo su $\mathcal{M}$ con lati aventi curvatura geodetica costante uguale a 1. Dire, giustificando la risposta se è possibile che T abbia angoli interni tutti uguali a $\frac{\pi}{2}$ e perimetro uguale a $\frac{\pi}{2}$.
(b) Dire giustificando la risposta se esiste un triangolo geodetico su $\mathcal{M}$ con angoli interni tutti uguali a $\frac{\pi}{3}$.

Esercizio 1.34. Considerare l'ellissoide $\mathcal{E}$ di equazione $4x^2 + 5y^2 + z^2 = 1$.
(a) Descrivere una triangolazione della superficie $\mathcal{E}$ in triangoli geodetici e calcolare la caratteristica di Eulero usando la formula $\chi(S) = n^o(facce) - n^o(lati) + n^o(vertici)$.
(b) Considerare il campo di vettori su $\mathcal{E}$ definito per ogni $p \in \mathcal{E}$ da

$$X(p) = \pi_p((0,1,0))$$

dove π_p é la proiezione sul piano tangente alla superficie.
Trovare i punti singolari di $X(p)$ e calcolare la somma degli indici di tali punti.
(c) Considerare il triangolo T su $\mathcal{E}$ definito da

$$\mathcal{S} \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \leq 0, y \leq 0, z \leq 0\}.$$

Calcolare $\int\int_T K$.

References

DC [1] M. P. Do Carmo: *Differential geometry of curves and surfaces,* Prentice Hall, (1976).