Geometria B (geometria differenziale)- Matematica
Esercizi A.A. 18-19

Esercizio 1. Considerare la seguente parametrizzazione della pseudosfera $\mathcal{P}$:

$$\mathbf{x}(u,v) = \left(\frac{\cos v}{\cosh u}, \frac{\sin v}{\cosh u}, u - \tanh u \right), \quad u \geq 0, \quad v \in (0, 2\pi)$$

1. Mostrare che la funzione $z(u) = u - \tanh u$ è crescente su $(0, \infty)$, quindi ad ogni valore di u corrisponde uno ed un solo valore di z.
2. Considerare la curva γ_c su $\mathcal{P}$ determinata da $\mathcal{P} \cap \{z = c\}$ con $c \geq 0$. Calcolare la curvatura geodetica di γ_c (notare che, per il punto precedente, fissato il parametro c, esiste un solo valore u_c tale che $u_c - \tanh u_c = c$).
3. Sia $\mathcal{P}_c$ la porzione di $\mathcal{P}$ determinata da $\mathcal{P} \cap \{0 \leq z \leq c\}$.
   (a) Calcolare la caratteristica di Eulero di $\mathcal{P}_c$.
   (b) Calcolare $\int_{\mathcal{P}_c} K$, dove K è la curvatura di Gauss di $\mathcal{P}$.
4. Calcolare il $\lim_{c \longrightarrow \infty} \int_{\mathcal{P}_c} K$ (notare che $u_0 = 0$ e $\lim_{c \longrightarrow \infty} u_c = \infty$).
5. Calcolare direttamente K (tramite la seconda forma fondamentale)
6. Dedurre dai punti precedenti l'area di M.

Esercizio 2. Considerare la superficie $\mathcal{S}$ in $\mathbb{R}^3$ parametrizzata da:

$$\mathbf{x}(x,y) = (x, y, (x^2 + y^2) - 4), \quad x, y \in \mathbb{R}^3$$

1. Considerare la curva γ_c su $\mathcal{S}$ determinata da $\mathcal{S} \cap \{z = c\}$ con $c > -4$.
   (a) Calcolare la curvatura geodetica di γ_c.
   (b) Calcolare la curvatura normale di γ_c.
2. Sia $\mathcal{S}_c$ la porzione di $\mathcal{S}$ determinata da $\mathcal{S} \cap \{0 \leq z \leq c\}$, $c > 0$.
   (a) Calcolare la caratteristica di Eulero di $\mathcal{S}_c$, esibendo una triangolazione.
   (b) Calcolare $\int_{\mathcal{S}_c} K$, dove K è la curvatura di Gauss di $\mathcal{S}$.
   (c) Calcolare il $\lim_{c \longrightarrow \infty} \int_{\mathcal{S}_c} K$.
3. Calcolare la curvatura media di $\mathcal{S}$.

Esercizio 3. Considerare una parametrizzazione locale $\mathbf{x} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathcal{S}$ di una superficie $\mathcal{S}$ tale che i coefficienti della prima forma fondamentale siano $E = 2u^2$, $F = 2uv$, $G = 2v^2 + 1$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.

1. Determinare se ci sono punti della superficie $\mathcal{S}$ in cui le curve coordinate formano un angolo di $\frac{\pi}{4}$.

2. Calcolare l'area di $\mathbf{x}(D)$ dove $D = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + v^2 \leq 4\}$.

3. Calcolare la lunghezza della curva $\mathbf{x} \circ \gamma : (0,2) \longrightarrow \mathcal{S}$ definita dalla curva $\gamma : (0,2) \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\alpha(t) = (t^2, 3)$.

Esercizio 4. Considerare la superficie $\mathcal{P}$ parametrizzata da

$$\mathbf{x}(\rho,\theta) = \big(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, 2\rho^2 + 1\big)\,,\ \rho \in \mathbb{R}^+,\ \theta \in (0,\pi)$$

orientata con il vettore normale che punta verso l'alto.

1. Calcolare la curvatura geodetica e la curvatura normale della curva sulla superficie determinata da $P \cap \{z = 3\}$.

2. Dire, giustificando la risposta, se ci sono paralleli di $\mathcal{P}$ che sono geodetiche.

3. Calcolare $\int_T K$ dove K è la curvatura di Gauss di $\mathcal{P}$ e T è il triangolo su $\mathcal{P}$ di vertici i punti $Q_1 = (0,0,1)$, $Q_2 = (0,1,3)$, $Q_3 = (1,0,3)$.

Esercizio 5. Considerare l'iperboloide ad una falda $\mathcal{I} = \{(x,y,z)\mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0\}$.

1. Mostrare che $\mathcal{I}$ è una superficie regolare.

2. Mostrare che la parametrizzazione

$$\mathbf{x}(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, \sqrt{\rho^2 - 1}),\ \rho > 1,\ \theta \in (0,2\pi)$$

   copre l'insieme $\mathcal{I}_+ = \mathcal{I} \cap \{z > 0\}$.

3. Determinare il vettore normale N relativo alla parametrizzazione data e considerare su $\mathcal{I}_+$ l'orientazione data da N.

4. Determinare la caratteristica di Eulero dell'insieme $R = \mathcal{I}_+ \cap \{0 \leq z \leq 2\}$ (esibendo una triangolazione).

5. Determinare la curvatura geodetica delle curve $\mathcal{I} \cap \{z = 0\}$ e $\mathcal{I} \cap \{z = 2\}$.

6. Determinare $\int_R K$, dove K è la curvatura di Gauss di $\mathcal{I}_+$.

7. Determinare la curvatura normale della curva $\mathcal{I} \cap \{z = 2\}$.

Esercizio 6. Sia $\mathcal{S}$ una superficie con la topologia di un toro meno un disco.

1. Calcolare la caratteristica di Eulero di S.

2. Supponiamo che $\mathcal{S}$ sia minima, che il bordo di $\mathcal{S}$ sia differenziabile ed abbia curvatura geodetica $\kappa_g = -2$. Calcolare la lunghezza massima del bordo di $\mathcal{S}$.

3. Supponiamo che $\mathcal{S}$ abbia curvatura di Gauss $K \geq 0$, che il bordo di $\mathcal{S}$ sia differenziabile tranne che in un punto, in cui l'angolo esterno sia $\theta = -\frac{\pi}{2}$, e che tale bordo abbia curvatura geodetica $\kappa_g = -1$. Calcolare la lunghezza minima del bordo di $\mathcal{S}$.

Esercizio 7. Considerare la superficie regolare $\mathcal{M}$ in $\mathbb{R}^3$ parametrizzata da

$$\mathbf{x}(t,s) = (\cos s + t\sin s, \sin s - t\cos s, t), \quad (t,s) \in \mathbb{R} \times (0,2\pi)$$

1. Calcolare la prima e la seconda forma fondamentale di $\mathcal{M}$.
2. Nel punto $P_0 = \mathbf{x}(0,0)$, determinare le direzioni principali e le curvature principali.
3. Mostrare che $\mathcal{M}$ è una superficie di rotazione.

Esercizio 8. Considerare l'iperboloide a due falde $\mathcal{I} = \{(x,y,z)\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2-z^2+1=0\}$.

1. Dire quale parte dell'iperboloide viene coperta dalla parametrizzazione

$$\mathbf{x}(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, \sqrt{\rho^2+1}),\ \ \rho > 0,\ \ \theta \in (0, 2\pi)$$

   Denotare tale insieme con $\mathcal{I}_+$.

2. Determinare il vettore normale N relativo alla parametrizzazione data e considerare su $\mathcal{I}_+$ l'orientazione data da N.
3. Determinare la parte della sfera $\mathbb{S}^2$ coperta dall'immagine della mappa di Gauss di $\mathcal{I}_+$ l'orientazione data da N.
4. Determinare la caratteristica di Eulero dell'insieme $R = \mathcal{I}_+ \cap \{1 \leq z \leq 2\}$ (esibendo una triangolazione).
5. Determinare la curvatura geodetica della curva $\mathcal{I} \cap \{z = 2\}$.
6. Determinare $\int_R K$, dove K è la curvatura di Gauss di $\mathcal{I}_+$.
7. Determinare la curvatura normale della curva $\mathcal{I} \cap \{z = 2\}$.

Esercizio 9. Considerare le seguenti superfici di $\mathbb{R}^3$.

$$\mathcal{C}: \quad \mathbf{x}(u,v) = (\cosh v\cos u, \cosh v \sin u, v) \quad u \in (0,2\pi),\ \ v \in \mathbb{R}$$

$$\mathcal{P}: \quad \mathbf{y}(U,V) = (U, V, 2(U^2+V^2)) \quad U, V \in \mathbb{R}$$

1. Calcolare la curvatura media e la curvatura di Gauss di $\mathcal{C}$ ed $\mathcal{P}$.
2. Sia $\varphi : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{P}$ una mappa differenziabile. Dire, giustificando la risposta, se φ può essere un'isometria globale o locale.
3. Considerare su $\mathcal{P}$ l'orientazione data dalla parametrizzazione. Calcolare la curvatura geodetica su $\mathcal{P}$ della curva $\alpha(t) = \mathbf{y}(U(t), V(t))$ ove $U(t) = \cos 2t$, $V(t) = \sin 2t$.

Esercizio 10. Considerare la superficie (non compatta) Σ di $\mathbb{R}^3$ parametrizzata da

$$\mathbf{x}(u,v) = (u, v, 2uv).$$

1. Calcolare l'espressione della mappa di Gauss di $N : \Sigma \longrightarrow \mathbb{S}^2$, nella parametrizzazione data.
2. Dire, giustificando la risposta, se la mappa di Gauss N è iniettiva e/o suriettiva.
3. Determinare il sottoinsieme di $\mathbb{S}^2$ ricoperto da $N(\Sigma)$.

Esercizio 11. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, considerare la mappa $F_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $F_n(x, y, z) = y^n + xz$.

a) Mostrare che 0 è un valore regolare per F se e solo se $n = 1$.

b) Trovare una parametrizzazione globale per la superficie $F_1^{-1}(0)$.

Esercizio 12. Sia $\mathcal{C}$ la curva del piano xz parametrizzata da

$$z = 1 + \frac{x^2}{4}, \quad x \in (1, 3).$$

Considerare la superficie $\mathcal{S}$ ottenuta dalla rotazione della curva $\mathcal{C}$ intorno all'asse z.

a) Scrivere una parametrizzazione della superficie $\mathcal{S}$.

b) Calcolare la prima e la seconda forma fondamentale di $\mathcal{S}$.

c) Calcolare la curvatura normale della curva di $\mathcal{S}$ data da $z = 2$.