

**PROGRAMMA DI GEOMETRIA B
GEOMETRIA DIFFERENZIALE
UNIVERSITA' DELL'AQUILA
6 CREDITI - AA 2016-2017**

BARBARA NELLI

- (1) Curve parametrizzate, curve regolari e lunghezza d'arco. enunciato il teorema della curva di Jordan. Definita la connessione per archi. Riferimento di Frénet. Teorema esistenza e unicità delle curve, data la curvatura e la torsione. Forma canonica locale.
- (2) Definizione di superfici regolari e primi esempi (piano, sfera con tutte le parametrizzazioni). .
Superfici regolari definite come grafici e come controimmagini di valori regolari. Un insieme definito come controimmagine di un valore regolare è una superficie regolare. Superfici di rotazione. Mappe differenziabili definite su superfici regolari. Mappe differenziabili tra superfici regolari. Differenziale di una mappa definita tra due superfici regolari. Definizione di vettore tangente ad una superficie. Dimostrazione del fatto che l'insieme dei vettori tangenti ad una superficie in un punto è l'immagine di \mathbb{R}^2 tramite il differenziale di una parametrizzazione della superficie.
- (3) Vettore normale ad una superficie. Prima forma fondamentale. Calcolo della lunghezza di una curva su una superficie. Calcolo dell'angolo tra due curve di una superficie, in particolare calcolo dell'angolo tra le curve coordinate. Mappa di Gauss, differenziale della mappa di Gauss. Curvatura normale, sezione normale. Seconda forma fondamentale. Curvature principali. Teorema di Olinde Rodrigues. Curvatura di Gauss e curvatura media. classificazione dei punti di una superficie: ellittici, parabolici, iperbolici, planari. Mappa di Gauss in coordinate locali. Indicatrice di Dupin. Direzioni asintotiche.
- (4) Direzioni coniugate: definizione e caratterizzazione. Coefficienti delle forme fondamentali per una superficie di rotazione. Equazione delle curve asintotiche. Curve asintotiche della catenoide e dell'elicoide. Superfici minime: definizione e caratterizzazione come punti critici del funzionale area. Definizione dei parametri isotermi su una superficie. Le funzioni coordinate di una superficie minima sono funzioni armoniche dei parametri isotermi. Determinazione dell'equazione di un grafico minimo. Calcolo della superficie di Scherk.
- (5) Discussione euristica sulla geometria intrinseca delle superfici. Definizione di isometria e isometria locale tra superfici. Due superfici sono localmente isometriche se hanno parametrizzazioni con coefficienti della prima forma fondamentale uguali. Definizione di mappa conforme e mappa conforme locale tra superfici. Condizione di conformità locale tra superfici (senza dimostrazione). Teorema: due superfici regolari sono sempre localmente conformi (senza dimostrazione). Simboli di Christoffel, equazione di Gauss ed equazioni di Codazzi-Mainardi. Calcolo dei simboli di Christoffel per una superficie di rotazione. Teorema Egregium. Teorema fondamentale della teoria locale delle superfici (senza dimostrazione).
- (6) Definizione di campo di vettori tangenti su una superficie. Differenziabilità di un campo di vettori. Campi di vettori lungo una curva della superficie. Derivata covariante. Campi di vettori paralleli. Il prodotto scalare tra due campi paralleli lungo una curva è costante. Definizione di trasporto parallelo. Il trasporto parallelo è una isometria. Calcolo di trasporto parallelo lungo un parallelo di S^2 . Definizione di geodetica parametrizzata. Definizione globale di curva geodetica. Valore algebrico della derivata covariante. Curvatura geodetica. Espressione del

valore algebrico della derivata covariante in funzione della prima forma fondamentale. Dimostrazione dell'esistenza e unicità del trasporto parallelo. Formula di Liouville per il calcolo della curvatura geodetica. Equazioni differenziali delle geodetiche su una superficie. Calcolo delle equazioni differenziali delle geodetiche nel caso delle superfici di rotazione.

- (7) Teorema di Gauss-Bonnet: enunciato e prova nel caso locale. Definizione di una triangolazione di una superficie e proprietà . Cenni di classificazione delle superfici compatte orientabili. Definizione del genere di una superficie. Enunciato e dimostrazione del teorema di Gauss-Bonnet globale. Applicazioni del teorema di Gauss-Bonnet. Teorema di Jacobi.
- (8) Definizione di campo di vettori differenziabile su una superficie e di punto singolare. Teorema dell'indice di Hopf-Poincaré. Applicazioni del teorema dell'indice.
- (9) Mappa esponenziale. Teoremi connessi. Coordinate geodetiche e intorni normali. Applicazioni delle coordinate polari geodetiche e degli intorni normali. Caso della curvatura costante: Teorema di Minding. Teorema di minimizzazione delle geodetiche

Testi consigliati.

M. Abate, F. Tovena: *Curve e Superfici*, Unitext Springer (2008).

M. P. Do Carmo: *Differential geometry of curves and surfaces*, Prentice Hall, (1976).