I FONDAMENTI DELLA MECCANICA QUANTISTICA
Analisi Storica e Problemi Aperti
G. Cattaneo – A. Rossi eds.
317–324

PROCESSI DI BERNSTEIN E MECCANICA QUANTISTICA

Maurizio Serva

PROCESSI DI BERNSTEIN E MECCANICA QUANTISTICA

Maurizio Serva

RIASSUNTO: La meccanica quantistica ha radicalmente modificato la nostra rappresentazione del mondo introducendo due elementi di rottura rispetto alla meccanica classica; da una parte ha accolto l'idea che i fenomeni fisici siano intrinsecamente non deterministici, dall'altra ne ha dato una descrizione mediante un formalismo che non ha le proprietà usuali della teoria delle probabilità. Negli ultimi anni, tuttavia, è stato proposto un approccio matematico alternativo che interpreta e descrive il comportamento casuale dei sistemi quantistici non relativistici con un linguaggio probabilistico classico. Lo scopo di questo resoconto è di illustrare brevemente questo approccio e di mostrare come è possibile ottenerne un'estensione al dominio relativistico.

Nei primi trenta anni di questo secolo la meccanica quantistica si è imposta come teoria dei fenomeni elementari trasformando radicalmente il linguaggio della fisica. Un aspetto della trasformazione è stato il passaggio da una rappresentazione deterministica del mondo ad una rappresentazione in cui i fenomeni fisici hanno una natura casuale. Questo ha reso necessario introdurre nuovi strumenti matematici e intuitivi di tipo probabilistico.

Un secondo aspetto, che ha rappresentato una rottura ancora più netta con la tradizione classica, consiste nel fatto che le regole del nuovo formalismo non sono quelle usuali della teoria delle probabilità.

Sin dalle origini si è posto quindi il problema di costruire un formalismo probabilistico classico equivalente alla meccanica quantistica, ossia capace di fornire le stesse previsioni per quel che riguarda i risultati di una misura.

Il risultato più soddisfacente in questo senso sembra essere attualmente la meccanica stocastica di NELSON [1–3]. Questa teoria, che si applica ai fenomeni non relativistici (per intenderci ai fenomeni descritti dall'equazione di Shroedinger), parte dall'ipotesi che il moto di una particella puntiforme sia generato dall'azione congiunta di forze classiche e di un disturbo casuale. L'origine del rumore non è specificata, ma si suppone che questo sia "intrinseco" ai fenomeni fisici ossia non riducibile a un effetto statistico ottenuto con una media su variabili nascoste, né imputabile all'interazione con l'ambiente.

Il contenuto cinematico di queste ipotesi consiste nell'assunzione che l'incremento infinitesimo della variabile posizione sia la somma di un termine "classico" (il prodotto $b \cdot dt$ di una velocità di deriva per l'intervallo di tempo) e di un incremento browniano dw. Le traiettorie risultano essere in conseguenza le realizzazioni continue ma non differenziali di un processo di Wiener. Questo processo (quando la costante di Planck e la massa elementare sono poste uguali a 1) è descritto da

$$x(t) = x + \int_S^t b(x(u), u)du + w(t - S)$$

(1) $$\rho(x, S)$$

dove $\rho(x, S)$ è la densità di probabilità che $x(S)$ sia in x al tempo iniziale S. $\rho(x, S)$ e l'equazione integrale permettono insieme di attribuire una probabilità ad ogni possibile traiettoria.

Il contenuto dinamico invece consiste nell'assunzione che le traiettorie di questi processi soddisfino l'equazione di Newton in un senso medio. Ciò permette di determinare la densità di probabilità ρ e la velocità di deriva b del processo come soluzioni di un'equazione di continuità e di un'equazione analoga a quella di Hamilton-Jacobi.

Si potrebbe obiettare che l'evoluzione dei sistemi descritti dall'equazione di Shroedinger è temporalmente reversibile mentre la descrizione mediante un processo stocastico sembra non esserlo.

Un analisi più approfondita mostra ovviamente che questo non è vero. Passato e futuro hanno infatti lo stesso ruolo in meccanica stocastica [3], ciò significa che il sistema descritto in (1.1) può essere altrimenti descritto mediante un processo che evolve dal futuro verso il passato.

$$x(t) = x - \int_t^T b^*(x(u), u)du + w(T - t)$$

(2) $$\rho(x, T)$$

dove ora $\rho(x, T)$ è la densità di probabilità che $x(T)$ sia in x al tempo finale $T \geq t$ mentre b^* è la velocità di deriva "all'indietro" legata a b dalla semplice relazione

$$b^* = b - \frac{1}{2}\nabla(\log \rho)$$

b^* and b entrano inoltre in modo simmetrico nella formulazione della parte dinamica della teoria.

Per riassumere si può dire che la simmetria temporale consiste nel fatto che la probabilità associata ad ogni singola traiettoria è la stessa se la si considera una realizzazione del processo "in avanti" (1.1) o del processo "all'indietro" (1.2). La situazione è del tutto analoga alla meccanica classica dove la traiettoria di una particella, una volta assegnato un campo di velocità, è completamente determinata sia fissando la posizione iniziale che quella finale.

L'estensione al dominio relativistico della meccanica stocastica comporta delle difficoltà sul piano matematico, tuttavia è stato possibile ottenere un'interpretazione stocastica dell'equazione di KLEIN-GORDON [4-9] e, limitatamente al caso unidimensionale anche di quella di DIRAC [10]. Mi limiterò qui a discutere brevemente soltanto il modello associato all'equazione di Klein-Gordon.

La direzione in cui cercare una possibile soluzione al problema è stata indicata da Guerra e Ruggiero. In un loro breve lavoro [4] proposero di utilizzare diffusioni a quattro dimensioni con un tempo invariante (tempo proprio) come parametro e in cui il tempo fisico fosse la quarta variabile stocastica.

La difficoltà tecnica che si deve superare se si vuole realizzare questo programma è dovuta al fatto che la metrica naturalmente associata alla equazione di Klein-Gordon è la metrica diagonale $g^{\mu\nu} = (1, -1, -1, -1)$ che non è positiva e quindi non può essere identificata con la matrice di covarianza di una diffusione markoviana a quattro dimensioni.

GUERRA e DOHRN in lavori successivi [5–6] introducono accanto alla metrica "dinamica" $g^{\mu\nu}$, una metrica "cinematica" positiva $\eta^{\mu\nu}$ che è la matrice di covarianza dei processi. Tramite un principio variazionale e un criterio di compatibilità tra le due metriche ottengono l'equazione di Klein-Gordon.

È possibile tuttavia un approccio [7-8] che non richiede l'introduzione di una metrica aggiuntiva. Ne illustrerò brevemente gli aspetti fondamentali.

Si è sottolineato precedentemente che la teoria di Nelson è invariante per inversione temporale e quindi si può descrivere l'evoluzione di un sistema sia mediante un processo di Markov "in avanti" sia con un processo "all'indietro".

Nella formulazione relativistica ci si aspetta ovviamente un analoga simmetria per inversione del tempo proprio. Questo non implica necessariamente che si debba usare ancora un processo diffusivo "in avanti" insieme al suo complementare "all'indietro". Al contrario si può pensare di utilizzare processi che in parte diffondono "in avanti" e in parte "all'indietro". (Ad esempio un processo le cui prime tre componenti sono un moto browniano tridimensionale che diffonde in avanti e la quarta un moto browniano unidimensionale che diffonde all'indietro).

Processi di questo tipo non hanno in genere la proprietà di Markov ma hanno comunque la più generale proprietà di BERNSTEIN [12-13]. Quest'ultima è una proprietà "naturalmente" simmetrica rispetto alla inversione temporale e può essere definita nel seguente modo: l'informazione che si ha sul processo di Bernstein $x(t)$ all'istante t se il suo passato è completamente conosciuto fino all'istante $t_0 \leq t$ e il suo futuro è completamente conosciuto dopo l'istante $t_1 \geq t$ è la stessa che si ha conoscendo soltanto $x(t_0)$ e $x(t_1)$.

Gli ingredienti per la costruzione della meccanica stocastica relativistica possono essere cercati quindi nella classe dei processi di tipo diffusivo che posseggono la proprietà di Bernstein e che hanno covarianza relativistica. La scelta più semplice è

$$
\begin{aligned}
\underline{x}(\tau) &= \underline{x} + \int_S^\tau \underline{b}(\underline{x}(u), t(u))du + \underline{w}(\tau - S) \\
ct(\tau) &= ct - \int_\tau^T b_\circ(\underline{x}(u), t(u))du + w_\circ(T - \tau)
\end{aligned} \tag{3}
$$

$$\rho(\underline{x}, S; t, T)$$

dove $\underline{w}$ e $w_\circ$ sono variabili browniane indipendenti, c è la velocità della luce (la costante di Planck e la massa della particella sono poste uguali a 1) e τ è un tempo invariante tale che $S \leq \tau \leq T$. Le realizzazioni di questo processo sono traiettorie nello spazio tempo quadridimensionale; $\underline{x}(\tau)$ rappresenta la posizione spaziale del sistema mentre $t(\tau)$ è il tempo fisico. Si noti che la componente spaziale diffonde in avanti mentre quella temporeale diffonde all'indietro. $\rho(\underline{x}, S; t, T)$ è la densità di probabilità dei valori "iniziali" del processo; in altre parole è la densità di probabilità congiunta che $\underline{x}(S)$ sia in $\underline{x}$ all'istante iniziale S e $t(T)$ sia in t all'istante finale T.

Insieme alla classe di diffusioni definita sopra si deve considerare la classe più generale che si ottiene da questa considerando tutte le possibili trasformazioni di Lorentz delle equazioni (1.3). Le diffusioni così ottenute avranno ancora la proprietà di Bernstein ma non saranno in generale esprimibili come semplici combinazioni di diffusioni in avanti e all'indietro. La covarianza relativistica e assicurata dal fatto che ogni processo di questa classe si trasforma con Lorentz in un altro elemento della classe e dal fatto che la densità di probabilità associata a ognuno di essi soddisfa un'equazione del tipo

$$
\begin{aligned}
\partial_\tau \rho &= -\partial_\mu(b^\mu \rho) - \frac{1}{2}\partial_\mu \partial^\mu \rho \equiv \\
&\equiv \frac{1}{c}\partial_t(b_\circ \rho) - \underline{\nabla}(\underline{b}\rho) - \frac{1}{2c^2}\partial_t \partial_t \rho + \frac{1}{2}\underline{\nabla}\,\underline{\nabla}\rho
\end{aligned} \tag{4}
$$

la cui covarianza è esplicita. Il laplaciano che compare nelle diffusioni di Markov è sostituita qui dal d'alambertiano $\partial_\mu \partial^\mu \equiv g^{\mu\nu}\partial_\mu \partial_\nu$ e quindi la metrica $g^{\mu\nu}$ emerge in modo naturale dalle assunziône cinematiche del modello.

Per formulare la equazione del moto è necessario prima introdurre due derivate medie D e D^* analoghe a quelle che compaiono nella teoria di Nelson. La parte dinamica della teoria si ottiene allora assumendo che l'equazione di Lagrange in media

$$\frac{1}{2}(DD^* + D^*D)x^\nu = \frac{e}{c}F^{\mu\nu}\frac{(D + D^*)}{2}x_\mu \tag{5}$$

sia verificata ($F^{\mu\nu}$ è il campo elettromagnetico).

Si dimostra poi facilmente che l'equazione (1.5) e l'equazione (1.4) sono insieme equivalenti alla equazione di Klein-Gordon.

La parte dinamica della teoria può anche essere formulata utilizzando un principio variazionale [8].

Un diverso approccio stocastico per descrivere una particella relativistica senza spin è stato proposto da De Angelis [9]. La sua costruzione utilizza processi a salti nello spazio il cui parametro è il tempo fisico. Recentemente si è visto che questi processi si possono riottenere dalle diffusioni quadridimensionali sopra discusse tramite una opportuna eliminazione del tempo proprio [11].

Il modello qui presentato fornisce una interpretazione stocastica della equazione di Klein-Gordon e quindi descrive una particella relativistica senza spin in un campo elettromagnetico quando questo non è abbastanza intenso da generare coppie. Purtroppo il problema della formulazione della meccanica stocastica per i fenomeni relativistici non ha ancora una soluzione completa e soddisfacente. Questo rappresenta soltanto un primissimo passo.

BIBLIOGRAFIA

[1] E. NELSON, *Phys. Rev.* **150** (1966), 1079.

[2] E. NELSON, *Dynamical Theories of Brownian Motion*, (Princeton University, Princeton, N.Y., 1967).

[3] F. GUERRA, *Phys. Rep.* **77** (1981), 263.

[4] F. GUERRA, P. RUGGIERO, *Lett. al Nuovo Cimento*, **23** (1978) 529.

[5] F. GUERRA, *Preprint Bi.Bo.S.* **167** Bielefeld (1986).

[6] D. DOHRN, F. GUERRA, *Phys. Rev.* D. **31** (1985) 2521.

[7] M. SERVA, *Annals de l'I.H.P.*, **49** (1988) 312.

[8] R. MARRA, M.SERVA, *Preprint Bi.Bo.S.* Bielefeld (1989).

[9] G.F. DE ANGELIS, *Preprint CARR*, Roma (1988).

[10] G.F. DE ANGELIS, G. JONA-LASINIO, M.SERVA, N. ZANGHI, *J.Phys. A*, **19**, (1986) 865.

[11] G.F. DE ANGELIS, M. SERVA, *Preprint Bi.Bo.S.* Bielefeld (1989).

[12] S. BERNSTEIN, *Verh. Intern. Math.*, Zurigo (1932).

[13] J.C. ZAMBRINI, *Phys. Rev.A.* **33** (1986) 1532.

AUTHOR'S ADDRESS

Dipartimento di Fisica
Università di Roma "La Sapienza"
00185 ROMA