Università degli Studi Roma Tre
Dipartimento di Fisica “E. Amaldi”

Meccanica Hamiltoniana

Dispense del corso di Meccanica Analitica e Statistica

L. Benfatto, R. Raimondi, E. Scoppola

A.A. 2003-2004
(correzioni 2006-07)

Nota: queste dispense riassumono il contenuto delle lezioni del corso di Meccanica Razionale relativamente alla Meccanica Hamiltoniana. Esse non sostituiscono i libri di testo, ma costituiscono piuttosto una guida alla lettura di tali testi. Per tale ragione di alcuni argomenti più facilmente accessibili viene data solo l'indicazione bibliografica.

Indice

1 Introduzione al formalismo hamiltoniano

1.1 Trasformata di Legendre

Vedi: [1] pag. 65-67

1.2 Equazioni di Hamilton

Vedi: [1] pag. 68-71

1.3 Teorema di Liouville

Vedi: [1] pag. 71-73

1.4 Teorema del ritorno di Poincarè e sue applicazioni

Vedi: [1] pag. 73-76

2 Trasformazioni canoniche e simplettiche

2.1 Matrici simplettiche

Vedi: [2] pag. 279-283

Al fine di studiare le trasformazioni dello spazio delle fasi $\mathcal{R}^{2N}$ introduciamo una notazione compatta:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{q} \end{pmatrix}$$

Le equazioni di Hamilton diventano dunque:

$$\dot{\mathbf{x}} = I \, \nabla_{\mathbf{x}} H(\mathbf{x}) \tag{2.1}$$

dove I è una matrice $2N \times 2N$ definita da:

$$I = \begin{pmatrix} 0_N & -1_N \\ 1_N & 0_N \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

dove si sono indicate con 0_N e 1_N rispettivamente le matrici $N \times N$ nulla e identità. Più esplicitamente:

$$I \, \nabla_{\mathbf{x}} H(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0_N & -1_N \\ 1_N & 0_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla_{\mathbf{p}} H \\ \nabla_{\mathbf{q}} H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\nabla_{\mathbf{q}} H \\ \nabla_{\mathbf{p}} H \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

Definizione 2.1 *Consideriamo lo spazio vettoriale $\mathcal{R}^{2N}$. Una matrice A è detta* **simplettica** *se:*

$$I = A^T I A \tag{2.4}$$

Proprietà delle matrici simplettiche:

- Le matrici simplettiche formano un **gruppo**, cioè se B e C sono matrici simplettiche, allora $A = BC$ è simplettica. Ciò si vede osservando che:

$$A^T I A = (BC)^T I B C = C^T B^T I B C = C^T I C = I \tag{2.5}$$

- La matrice inversa di una matrice simplettica è:

$$A^{-1} = -I A^T I \tag{2.6}$$

  ed è ancora una matrice simplettica. Infatti, poiché dalla definizione (2.2) segue banalmente che $I^2 = -1$, allora $I = A^T I A \Rightarrow I^2 = I A^T I A \Rightarrow -1 = I A^T I A$ e quindi $A(-I A^T I) = 1$. Inoltre si vede facilmente che A^{-1} è simplettica:

$$(A^{-1})^T I A^{-1} = I^T A I^T I I A^T I = I A (-I A^T I) = I A A^{-1} = I$$

- La trasposta di una matrice simplettica è simplettica. Se $B = A^T$ abbiamo:

$$B^T I B = (A^T)^T I A^T = A I A^T$$

  Ricavando A^T dalla (2.4) utilizzando la (2.5) e ricordando che $I^T = -I$:

$$A^T = -I A^{-1} I \Rightarrow A I A^T = -A I^2 A^{-1} I = I$$

  Si osservi che da questa proprietà segue anche che la definizione (2.4) di matrice simplettica è del tutto equivalente a richiedere:

$$I = A I A^T$$

In analogia con il prodotto scalare ordinario, si può definire un **prodotto scalare simplettico** tramite la matrice I:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y})_S \equiv \mathbf{x}^T I \mathbf{y} \tag{2.7}$$

Il prodotto scalare simplettico è invariante per una trasformazione lineare simplettica. Se A è una matrice simplettica:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' &= A\mathbf{x} \quad \mathbf{y}' = A\mathbf{y} \\ (\mathbf{x}')^T I \mathbf{y}' &= (A\mathbf{x})^T I (A\mathbf{y}) = \mathbf{x}^T A^T I A \mathbf{y} = \mathbf{x}^T I \mathbf{y} \end{aligned}$$

2.2 Trasformazioni canoniche

Vedi: [2] pag. 295-299

Definizione 2.2 *Consideriamo una trasformazione differenziabile e invertibile* $\mathcal{R}^{2N} \to \mathcal{R}^{2N}$ *dello spazio delle fasi* $\mathcal{R}^{2N}$ *in se stesso:*

$$(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \to (\mathbf{P}, \mathbf{Q}) \quad \text{o} \quad \mathbf{x} \to \mathbf{X} \tag{2.8}$$

Tale trasformazione **conserva la struttura canonica delle equazioni di Hamilton** *se, comunque scelta una Hamiltoniana* $H(\mathbf{x}, t)$ *esiste una funzione corrispondente* $K(\mathbf{X}, t)$*, detta nuova Hamiltoniana, tale che:*

$$\begin{array}{rcl} \dot{\mathbf{q}} & = & \nabla_{\mathbf{p}} H \\ \dot{\mathbf{p}} & = & -\nabla_{\mathbf{q}} H \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rcl} \dot{\mathbf{Q}} & = & \nabla_{\mathbf{P}} K \\ \dot{\mathbf{P}} & = & -\nabla_{\mathbf{Q}} K \end{array} \tag{2.9}$$

Si osservi che tale definizione è non banale: infatti data una trasformazione differenziabile e invertibile:

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{Q} & = & \mathbf{Q}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) \\ \mathbf{P} & = & \mathbf{P}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) \end{array}$$

in generale l'evoluzione temporale di $\mathbf{Q}$ e $\mathbf{P}$, ottenuta da $\mathbf{X}(\mathbf{x}(t), t)$ con $\mathbf{x}(t)$ soluzione di (2.1), non è descrivibile in termini di una funzione di Hamilton K, ma è data da un generico campo vettoriale $(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ di $\mathcal{R}^{2N}$:

$$\dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{v}, \quad \dot{\mathbf{P}} = \mathbf{w}$$

Se invece la trasformazione preserva la struttura canonica, allora *qualunque* sia l'Hamiltoniana H è possibile trovare una funzione K tale che $\mathbf{v} = \nabla_{\mathbf{P}} K, \mathbf{w} = -\nabla_{\mathbf{Q}} K$.

Una classe molto generale di trasformazioni che preservano la struttura canonica è individuata dalla seguente definizione:

Definizione 2.3 *Una trasformazione di coordinate* $\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, t)$ *differenziabile ed invertibile si dice* **canonica** *se la matrice jacobiana della trasformazione* $J = \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{X}$ *è simplettica. Una trasformazione canonica* $\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{x})$ *indipendente dal tempo si dice* **completamente canonica**.

Vale infatti il seguente teorema:

Teorema 2.1 *Le trasformazioni canoniche preservano la struttura canonica delle equazioni di Hamilton*

Osservazioni preliminari:

- *Equazione del moto per* $\mathbf{X}$. Consideriamo la trasformazione differenziabile e invertibile $\mathbf{x} \to \mathbf{X}$, e determinamo l'equazione del moto per $\mathbf{X}(\mathbf{x}(t), t)$, sapendo che $\mathbf{x}$ soddisfa l'equazione (2.1). Derivando $\mathbf{X}$ rispetto al tempo abbiamo:

$$\begin{aligned} \dot{X}_i &= \sum_{j=1}^{2N} \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \dot{x}_j + \frac{\partial X_i}{\partial t} = \\ &= \sum_{j=1}^{2N} \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \sum_{k=1}^{2N} I_{jk} \frac{\partial H}{\partial x_k} + \frac{\partial X_i}{\partial t} \end{aligned}$$

Definendo $\hat{H}(\mathbf{X}, t) \equiv H(\mathbf{x}(\mathbf{X}, t), t)$ allora abbiamo che:

$$\frac{\partial H}{\partial x_k} = \sum_{m=1}^{2N} \frac{\partial X_m}{\partial x_k} \frac{\partial \hat{H}}{\partial X_m}$$

Introducendo poi lo jacobiano della trasformazione, $J_{ij} = \frac{\partial X_i}{\partial x_j}$, l'equazione del moto per $\dot{X}_i$ diventa:

$$\dot{X}_i = \sum_{j,k,m=1}^{2N} J_{ij} I_{jk} J^T_{km} \frac{\partial \hat{H}}{\partial X_m} + \frac{\partial X_i}{\partial t}$$

che in notazione compatta diventa:

$$\dot{\mathbf{X}} = J I J^T \nabla_{\mathbf{X}} H(\mathbf{x}(\mathbf{X}, t), t) + \partial_t \mathbf{X} \tag{2.10}$$

- *Nozione di campo hamiltoniano.*

Definizione 2.4 *Un campo vettoriale* $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ *è detto* **hamiltoniano** *se esiste una funzione* $f(\mathbf{x}, t)$ *di classe* $\mathcal{C}^2$ *tale che:*

$$\mathbf{v} = I \nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}, t) \tag{2.11}$$

Si può facilmente dimostrare che le seguenti affermazioni sono equivalenti (Vedi [2], pag. 287-294):

  - Il campo $\mathbf{v}$ è hamiltoniano;

– La matrice $B_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$ è una matrice hamiltoniana, cioè:

$$B = IS \tag{2.12}$$

con S matrice simmetrica;

– La matrice IB è simmetrica

Dim. - Affermare che l'equazione per $\mathbf{X}$ conserva la forma canonica equivale ad affermare che il membro a destra dell'equazione (2.10) per $\dot{\mathbf{X}}$ è un campo hamiltoniano, cioè:

$$\mathbf{v} = JIJ^T \nabla_{\mathbf{X}} H(\mathbf{x}(\mathbf{X}, t), t) + \partial_t \mathbf{X} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \tag{2.13}$$

è hamiltoniano. Per quanto riguarda il primo termine $\mathbf{v}_1$ che contribuisce a $\mathbf{v}$, se J è simplettica segue immediatamente che:

$$\mathbf{v}_1 = JIJ^T \nabla_{\mathbf{X}} H(\mathbf{x}(\mathbf{X}, t), t) = I \nabla_{\mathbf{X}} H(\mathbf{x}(\mathbf{X}, t), t) \tag{2.14}$$

cioè $\mathbf{v}_1$ è della forma (2.11) e quindi è un campo hamiltoniano. Per quanto riguarda $\mathbf{v}_2$, dimostriamo che la matrice $F = IB$ dove $B = \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{v}_2$ è simmetrica. Abbiamo:

$$F_{ij} = \sum_{k=1}^{2N} I_{ik} \frac{\partial}{\partial X_j} \frac{\partial X_k}{\partial t} = \sum_{k,l=1}^{2N} I_{ik} \frac{\partial x_l}{\partial X_j} \frac{\partial}{\partial x_l} \frac{\partial X_k}{\partial t} = \sum_{k,l=1}^{2N} I_{ik} \left(\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial X_k}{\partial x_l} \right) \frac{\partial x_l}{\partial X_j} \tag{2.15}$$

cioè:

$$F = I \left(\frac{\partial J}{\partial t} \right) J^{-1} \tag{2.16}$$

Poichè J è simplettica, $J^{-1} = -IJ^T I$ (vedi (2.6)), con $I^T = -I$, per cui abbiamo:

$$F = -I(\partial_t J) I J^T I \Rightarrow F^T = -I^T J I^T (\partial_t J^T) I^T = IJI(\partial_t J^T) I$$

Inoltre essendo $JIJ^T = I$ è $\partial_t(JIJ^T) = 0$, cioè $(\partial_t J) I J^T + JI(\partial_t J^T) = 0$, per cui:

$$F^T = I[-(\partial_t J) I J^T] I = F$$

Pertanto, essendo la matrice F simmetrica, ne segue che anche il campo $\mathbf{v}_2$ è hamiltoniano, e in accordo con la (2.11), esiste una funzione $K_0(\mathbf{X}, t)$ tale che:

$$\partial_t \mathbf{X} = I \nabla_{\mathbf{X}} K_0(\mathbf{X}, t) \tag{2.17}$$

Dalle (2.14) e (2.17) segue che il campo $\dot{\mathbf{X}}$ è hamiltoniano, e che:

$$\dot{\mathbf{X}} = I\nabla_{\mathbf{X}} \left(H(\mathbf{x}(\mathbf{X}, t)) + K_0(\mathbf{X}, t) \right) = I\nabla_{\mathbf{X}} K(\mathbf{X}, t) \tag{2.18}$$

dove la nuova funzione di Hamilton è:

$$K = \hat{H} + K_0 \tag{2.19}$$

∎

3 Parentesi di Poisson

In questa sezione ci proponiamo di dare una caratterizzazione delle trasformazioni canoniche in termini delle parentesi di Poisson.

3.1 Definizione e proprietà

Vedi: [2] pag. 321, 331-332

Definizione 3.1 *Date due funzioni $f(\mathbf{x}, t)$ e $g(\mathbf{x}, t)$ definite in $\mathcal{R}^{2N} \times \mathcal{R}$ si definisce* **parentesi di Poisson** *delle due funzioni il prodotto scalare simplettico dei gradienti delle due funzioni (vd (2.7)):*

$$\{f, g\} = (\nabla f)^T I \nabla g \tag{3.1}$$

Osserviamo che la (3.1) è del tutto equivalente a definire:

$$\begin{aligned} \{f, g\} &= \nabla_{\mathbf{q}} f \cdot \nabla_{\mathbf{p}} g - \nabla_{\mathbf{q}} g \cdot \nabla_{\mathbf{p}} f = \\ &= \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right] \end{aligned} \tag{3.2}$$

Dalla precedente segue anche che:

$$\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}, \qquad \{q_i, q_j\} = 0, \qquad \{p_i, p_j\} = 0 \tag{3.3}$$

Infatti, ad esempio:

$$\{q_i, p_j\} = \sum_{k=1}^{N} \left[\frac{\partial q_i}{\partial q_k} \frac{\partial p_j}{\partial p_k} - \frac{\partial q_i}{\partial p_k} \frac{\partial p_j}{\partial q_k} \right] = \sum_{k=1}^{N} \delta_{ik} \delta_{jk} = \delta_{ij}$$

Le (3.3) sone dette **parentesi di Poisson fondamentali**.

Comunque scelte le funzioni f, g, h e $\forall \alpha, \beta, \gamma \,\epsilon\, \mathcal{R}$, valgono le seguenti proprietà delle parentesi di Poisson:

- Antisimmetria:
$$\{f, g\} = -\{g, f\} \tag{3.4}$$
- Bilinearità:
$$\{\alpha f + \beta g, \gamma h\} = \alpha\gamma\{f, h\} + \beta\gamma\{g, h\} \tag{3.5}$$
- Composizione:
$$\{f, gh\} = \{f, g\}h + g\{f, h\} \tag{3.6}$$
- **Identità di Jacobi**:
$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0 \tag{3.7}$$

Dim. - Per evitare il calcolo diretto, osserviamo che $\{g, h\}$ è lineare ed omogenea nelle derivate prime di g ed h. Allora $\{f, \{g, h\}\}$ è lineare ed omogenea nelle derivate seconde di g ed h. Complessivamente, tutti i termini della (3.7) sono lineari ed omogenei nelle derivate seconde di f, g, h. L'idea della dimostrazione è quella di far vedere che il coefficiente di una qualunque derivata seconda è nullo. Ad esempio $\partial^2 g/\partial p_i^2$ comparirà solo nel primo e nel terzo termine della (3.7), ed il suo coefficiente sarà:

$$\begin{aligned}
\{f, \{g, h\}\} &= \{f, \nabla_{\mathbf{q}} g \cdot \nabla_{\mathbf{p}} h - \nabla_{\mathbf{p}} g \cdot \nabla_{\mathbf{q}} h\} = \\
&= -\{f, \nabla_{\mathbf{p}} g \cdot \nabla_{\mathbf{q}} h\} + \text{altri termini} = \\
&= -\nabla_{\mathbf{q}} f \cdot \nabla_{\mathbf{p}} (\nabla_{\mathbf{p}} g \cdot \nabla_{\mathbf{q}} h\} + \text{altri termini} = \\
&= -\partial_{q_i} f \, \partial^2_{p_i} g \, \partial_{q_i} h + \text{altri termini}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\{h, \{f, g\}\} &= \{h, \nabla_{\mathbf{q}} f \cdot \nabla_{\mathbf{p}} g - \nabla_{\mathbf{p}} f \cdot \nabla_{\mathbf{q}} g\} = \\
&= \{h, \nabla_{\mathbf{q}} f \cdot \nabla_{\mathbf{p}} g\} + \text{altri termini} = \\
&= \nabla_{\mathbf{q}} h \cdot \nabla_{\mathbf{p}} (\nabla_{\mathbf{q}} f \cdot \nabla_{\mathbf{p}} g\} + \text{altri termini} = \\
&= \partial_{q_i} h \, \partial^2_{p_i} g \, \partial_{q_i} f + \text{altri termini}
\end{aligned}$$

quindi $\partial^2_{p_i} g \, (-\partial_{q_i} f \, \partial_{q_i} h + \partial_{q_i} h \, \partial_{q_i} f) = 0$. ∎

3.2 Parentesi di Poisson ed integrali primi del moto

Consideriamo ora una funzione $f(\mathbf{x}, t)$ calcolata lungo una traiettoria che è soluzione delle equazioni di Hamilton. La sua derivata rispetto al tempo è:

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{q}} f \cdot \dot{\mathbf{q}} + \nabla_{\mathbf{p}} f \cdot \dot{\mathbf{p}} = \\ &= \frac{\partial f}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{q}} f \cdot \nabla_{\mathbf{p}} H - \nabla_{\mathbf{p}} f \cdot \nabla_{\mathbf{q}} H = \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\} \qquad (3.8) \end{aligned}$$

Possiamo dunque caratterizzare gli integrali primi in termini delle parentesi di Poisson con il seguente teorema:

Teorema 3.1 *Una funzione $f : \mathcal{R}^{2N} \to \mathcal{R}$ indipendente dal tempo è un integrale primo del moto se e solo se la sua parentesi di Poisson con H è nulla, cioè:*

$$\{f, H\} = 0 \qquad (3.9)$$

Dalla identità di Jacobi segue:

Teorema 3.2 *(di Poisson) Se f, g sono integrali primi del moto, allora anche $\{f, g\}$ è un integrale primo del moto.*

Dim. - Se f e g non dipendono esplicitamente dal tempo, usando l'identità di Jacobi (3.7) abbiamo:

$$\frac{d}{dt}\{f, g\} = \{\{f, g\}, H\} = -\{H, \{f, g\}\} = \{f, \{g, H\}\} + \{g, \{H, f\}\} = 0$$

avendo usato il fatto che f e g sono integrali primi, per cui (vd (3.9)) $\{f, H\} = \{g, H\} = 0$. Se invece f e g dipendono esplicitamente dal tempo:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\{f, g\} &= \frac{\partial}{\partial t}\{f, g\} + \{\{f, g\}, H\} = \\ &= \left\{\frac{\partial f}{\partial t}, g\right\} + \left\{f, \frac{\partial g}{\partial t}\right\} + \{f, \{g, H\}\} - \{g, \{f, H\}\} = \\ &= \left\{\frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\}, g\right\} + \left\{f, \frac{\partial g}{\partial t} + \{g, H\}\right\} = 0, \end{aligned}$$

e quindi $\{f, g\}$ è un integrale primo del moto. ∎

3.3 Esempi: integrali primi di moti particolari

Esempio 3.1 *Componenti del momento angolare.*
Si consideri:

$$\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \Rightarrow l_x = yp_z - zp_y,\ l_y = zp_x - xp_z,\ l_z = xp_y - yp_x \tag{3.10}$$

Introducendo il tensore di Ricci possiamo porre:

$$l_i = \varepsilon_{ijk} q_j p_k \tag{3.11}$$

Calcoliamo le parentesi di Poisson fra le varie componenti del momento angolare:

$$\begin{aligned}
\{l_i, l_j\} &= \{\varepsilon_{ikm} q_k p_m, \varepsilon_{jnl} q_n p_l\} \\
&= \varepsilon_{ikm}\varepsilon_{jnl}\{q_k p_m, q_n p_l\} = \varepsilon_{ikm}\varepsilon_{jnl}(\{q_k, p_l\} p_m q_n + q_k p_l \{p_m, q_n\}) = \\
&= \varepsilon_{ikm}\varepsilon_{jnl}(\delta_{kl} p_m q_n - \delta_{mn} q_k p_l) = \varepsilon_{ikm}\varepsilon_{jnk} p_m q_n - \varepsilon_{ikm}\varepsilon_{jml} q_k p_l
\end{aligned}$$

Chiamando nel primo termine m con k e n con l abbiamo:

$$\begin{aligned}
\{l_i, l_j\} &= \varepsilon_{imk}\varepsilon_{jlm} p_k q_l - \varepsilon_{ikm}\varepsilon_{jml} q_k p_l = \\
&= \varepsilon_{imk}\varepsilon_{jlm}(q_l p_k - q_k p_l) = \\
&= \varepsilon_{imk}\varepsilon_{jml}(q_k p_l - q_l p_k)
\end{aligned}$$

Ad esempio per $i = 1, j = 2$ si ha:

$$\{l_1, l_2\} = \varepsilon_{1mk}\varepsilon_{2ml}(q_k p_l - q_l p_k) = \varepsilon_{132}\varepsilon_{231}(q_2 p_1 - q_1 p_2) = (q_1 p_2 - q_2 p_1) = l_3$$

In generale:

$$\{l_i, l_j\} = \varepsilon_{ijl} l_k \tag{3.12}$$

cioè, tornando alla notazione (x, y, z):

$$\{l_x, l_y\} = l_z,\ \{l_y, l_z\} = l_x,\ \{l_z, l_x\} = l_y \tag{3.13}$$

Esempio 3.2 *Integrali primi del moto libero.*
Sia data l'Hamiltoniana:

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) \tag{3.14}$$

Ovviamente si ha che $\{H, p_x\} = 0$, e analoghe per gli altri impulsi, cioè ogni componente dell'impulso è un integrale primo del moto. Inoltre abbiamo che:

$$\begin{aligned}
\{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2, l_x\} &= 2p_x\{p_x, l_x\} + 2p_y\{p_y, l_x\} + 2p_z\{p_z, l_x\} = \\
&= 2p_y\{p_y, yp_z - zp_y\} + 2p_z\{p_z, yp_z - zp_y\} = \\
&= -2p_y p_z + 2p_z p_y = 0
\end{aligned}$$

Quindi anche le componenti del momento angolare sono delle costanti del moto: possiamo scrivere

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{p} + \mathbf{r}\frac{d\mathbf{p}}{dt} = 0 \tag{3.15}$$

Esempio 3.3 *Moto in campo centrale*
Sia data l'Hamiltoniana:

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + U(r) \tag{3.16}$$

Calcolando le parentesi di Poisson degli impulsi abbiamo stavolta:

$$\{p_x, H\} = \{p_x, U(r)\} = -\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial p_x}{\partial p_k}\frac{\partial U(r)}{\partial q_k} = -\frac{\partial U}{\partial x} \neq 0 \tag{3.17}$$

cioè in campo centrale l'impulso non è più conservato. Tuttavia:

$$\begin{aligned}
\{l_x, H\} &= \{l_x, U(r)\} = \{yp_z - zp_y, U(r)\} = \\
&= p_z\{y, U(r)\} + y\{p_z, U(r)\} - z\{p_y, U(r)\} - p_y\{z, U(r)\} = \\
&= y\{p_z, U(r)\} - z\{p_y, U(r)\} = -y\frac{\partial U}{\partial z} + z\frac{\partial U}{\partial y} = \\
&= \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r}(-yz + zy) = 0
\end{aligned}$$

Quindi le componenti del momento angolare si conservano per un moto in campo centrale.

3.4 Parentesi di Poisson e trasformazioni canoniche

Vedi: [2] pag. 323-325
Le parentesi di Poisson permettono una caratterizzazione delle trasformazioni canoniche. Vale il seguente teorema:

Teorema 3.3 *Sia* $\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, t)$ *una trasformazione dello spazio delle fasi in se stesso. Le tre affermazioni seguenti sono equivalenti:*

(i) *La trasformazione* $\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, t)$ *è canonica.*

(ii) *Date due qualunque funzioni* $f(\mathbf{x}, t)$ *e* $g(\mathbf{x}, t)$, *se* $F(\mathbf{X}, t) = f(\mathbf{x}(\mathbf{X}, t), t)$ *e* $G(\mathbf{X}, t) = g(\mathbf{x}(\mathbf{X}, t), t)$ *sono le funzioni trasformate secondo la trasformazione* $\mathbf{X}$, *allora:*

$$\{f, g\}_{\mathbf{x}} = \{F, G\}_{\mathbf{X}} \tag{3.18}$$

intendendosi con $\{f, g\}_{\mathbf{x}}$ *le parentesi di Poisson nelle vecchie variabili canoniche* $\mathbf{x} = (\mathbf{p}, \mathbf{q})$, *e con* $\{F, G\}_{\mathbf{X}}$ *quelle nelle nuove variabili canoniche* $\mathbf{X} = (\mathbf{P}, \mathbf{Q})$.

(iii) *Si conservano le parentesi di Poisson fondamentali:*

$$\{Q_i, P_j\}_{\mathbf{x}} = \delta_{ij}, \qquad \{Q_i, Q_j\}_{\mathbf{x}} = 0, \qquad \{P_i, P_j\}_{\mathbf{x}} = 0 \tag{3.19}$$

Osservazione La (iii) è in realtà un caso particolare della (ii), ma a differenza della (ii) fornisce un criterio pratico per verificare la canonicità della trasformazione.

Dim. - Per provare il teorema verificheremo che le affermazioni (i)-(iii) si implicano ciclicamente, ossia che (i)→(ii), (ii)→(iii), (iii)→(i). Iniziamo a dimostrare che la (i) implica la (ii), cioè che se $\mathbf{X}(\mathbf{x}, t)$ è canonica allora vale la (3.18). Vediamo anzitutto come trasforma il gradiente di una funzione:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} F(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{2N} \frac{\partial F}{\partial X_k}(\mathbf{x}(\mathbf{X}, t)) \frac{\partial X_k}{\partial x_i}$$

poichè

$$J_{ij} = \frac{\partial X_i}{\partial x_k} \Rightarrow \frac{\partial X_k}{\partial x_i} = (J^T)_{ik}$$

avremo che:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} F(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{2N} \frac{\partial F}{\partial X_k} (J^T)_{ik} \qquad \Rightarrow \qquad \nabla_{\mathbf{x}} = J^T \nabla_{\mathbf{X}} \tag{3.20}$$

Avremo di conseguenza che:

$$\begin{aligned} \{f, g\}_{\mathbf{x}} &= (\nabla_{\mathbf{x}} f)^T I \nabla_{\mathbf{x}} g = (J^T \nabla_{\mathbf{X}} F)^T I (J^T \nabla_{\mathbf{X}} G) = \\ &= (\nabla_{\mathbf{X}} F)^T J I J^T (\nabla_{\mathbf{X}} G) = (\nabla_{\mathbf{X}} F)^T I \nabla_{\mathbf{X}} G = \{F, G\}_{\mathbf{X}} \end{aligned} \tag{3.21}$$

avendo usato la condizione $I = JIJ^T$ valida per trasformazioni canoniche. Poichè come osservato la (ii) implica banalmente la (iii), che ne costituisce un esempio particolare, passiamo a dimostrare che la (iii) implica la (i), cioè che la (3.19) equivale ad affermare che la trasformazione $\mathbf{x} \to \mathbf{X}$ è canonica, ossia che la matrice J è simplettica. A tale scopo osserviamo che, per una qualunque trasformazione, la matrice JIJ^T ha la rappresentazione a blocchi $N \times N$:

$$JIJ^T = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

dove le matrici A, B, C, D hanno componenti:

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \{P_i, P_j\}_{\mathbf{x}} \\ B_{ij} &= \{P_i, Q_j\}_{\mathbf{x}} \\ C_{ij} &= \{Q_i, P_j\}_{\mathbf{x}} \\ D_{ij} &= \{Q_i, Q_j\}_{\mathbf{x}} \end{aligned}$$

In virtù della (3.19) abbiamo che $A = D = 0$, $C_{ij} = -B_{ij} = \delta_{ij}$ e quindi $JIJ^T = I$. ∎

4 Forme differenziali

4.1 Richiami di analisi

Vedi: [4] Cap. 8, pag. 328-355

Al fine di applicare i teoremi del calcolo integrale per forme differenziali alla meccanica hamiltoniana, riprendiamo in questa sezione alcune definizioni e proprietà delle forme differenziali.

In fisica si incontrano integrali curvilinei del tipo:

$$\int_\gamma F_1(\mathbf{x})dx_1 + F_2(\mathbf{x})dx_2 + F_3(\mathbf{x})dx_3$$

ad esempio nel calcolo del lavoro compiuto da una forza lungo un cammino γ in $\mathcal{R}^3$. Le componenti F_i sono funzioni definite in $\mathcal{R}^3$.

Definizione 4.1 *Chiameremo una* **forma differenziale** ω *in* $\mathcal{R}^N$ *(d'ora in avanti abbreviata con f.d.) una generica espressione del tipo:*

$$\omega(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N} a_i(\mathbf{x})dx_i \quad , \quad \mathbf{x}\varepsilon\mathcal{R}^N \tag{4.1}$$

La regolarità delle funzioni $a_i(\mathbf{x})$, componenti di ω in questa base, determina la regolarità della f.d..

Il differenziale totale di una funzione $f(\mathbf{x})$ in $\mathcal{R}^N$:

$$df = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

è una f.d. che si dice **esatta**. Sia ω una f.d. continua e sia $\phi : [a,b] \to \mathcal{R}^N$ una curva regolare a tratti con sostegno in A, dominio di definizione di ω. L'**integrale di** ω lungo ϕ è definito da:

$$\int_\phi \omega \equiv \int_a^b \sum_{i=1}^{N} a_i(\phi(t))\phi_i'(t)dt \tag{4.2}$$

Una f.d si dice **chiusa** se:

$$\frac{\partial a_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}) = \frac{\partial a_j}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \tag{4.3}$$

Teorema 4.1 *Se A è stellato ogni f.d. chiusa è esatta*

Osserviamo che abbiamo utilizzato questo teorema quando abbiamo dimostrato che le trasformazioni canoniche preservano la struttura canonica (vedi la (2.11)). Per la dimostrazione di questo e dei prossimi teoremi vedi per es. Giusti o un altro testo di analisi.

Richiamiamo ora rapidamente alcuni ben noti risultati di calcolo vettoriale in tre dimensioni:

Teorema 4.2 della divergenza *(o di Gauss-Green) Il flusso di un campo vettoriale attraverso una superficie chiusa è pari all'integrale di volume della divergenza del campo vettoriale. Se $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ è un campo vettoriale in $\mathcal{R}^3$ ed $A \subset \mathcal{R}^3$:*

$$\int_{\partial A} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_{ext})\, d\sigma = \int_A \mathrm{div}(\mathbf{v}(\mathbf{x}))\, d\mathbf{x} \tag{4.4}$$

con $\mathbf{n}_{ext}$ normale esterna alla superficie ∂A.

Teorema 4.3 di Stokes *La circuitazione di un campo vettoriale $\mathbf{v}$ lungo una curva chiusa è pari al flusso del rotore di $\mathbf{v}$ attraverso la superficie racchiusa dalla curva. Se $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ è un campo vettoriale in $\mathcal{R}^3$ e $\omega = \sum_{i=1}^{3} v_i(\mathbf{x})dx_i$ è la f.d. ad esso associata, per ogni superficie S:*

$$\oint_{\partial S^+} \omega = \int_S (\mathrm{rot}\mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n})\, d\sigma \tag{4.5}$$

dove l'apice $^+$ *indica che la curva* ∂S*, frontiera di* S*, è percorsa in senso antiorario rispetto alla normale* $\mathbf{n}$ *alla superficie* S*.*

Sia γ_1 una curva chiusa, sia $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ un campo vettoriale in $\mathcal{R}^3$ e sia $\mathbf{r} \equiv \mathrm{rot}\mathbf{v}$. Dato $\mathbf{r}$ definiamo il sistema di equazioni differenziali in $\mathcal{R}^3$:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{r}(\mathbf{x})$$

Le soluzioni $\mathbf{x}(t)$ sono dette **curve integrali** di $\mathbf{r}$ e definiscono delle traiettorie in $\mathcal{R}^3$. Tutte le curve integrali di $\mathbf{r}$ che partono dai punti della curva γ_1 sono dette linee di rotore, e definiscono un tubo in $\mathcal{R}^3$ detto **tubo di rotore**.

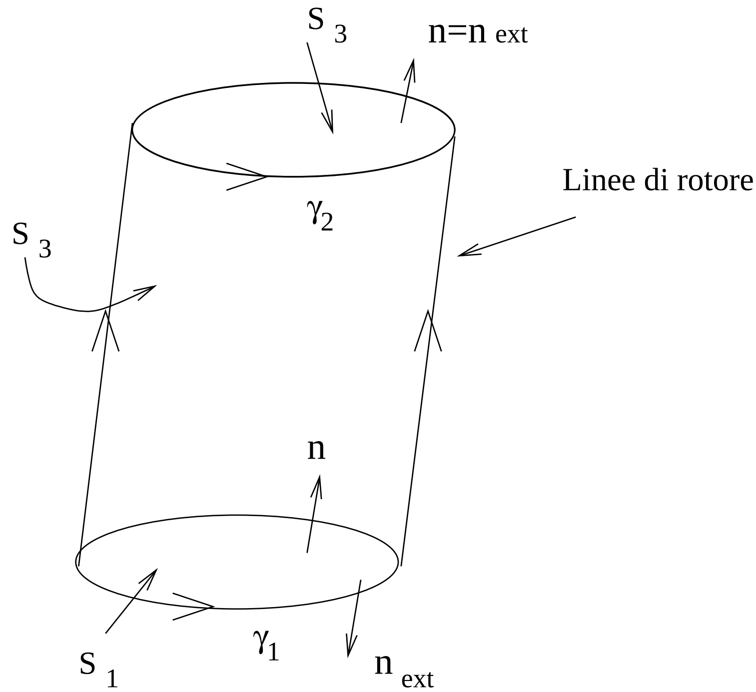

Figura 1: Tubo di rotore.

Sia γ_2 la curva che otteniamo tagliando il tubo di rotore così ottenuto con un piano arbitrariamente scelto (vedi Fig. 1). Sia V il volume racchiuso nel tubo di rotore tra le superfici S_1 ed S_2 racchiuse rispettivamente da γ_1 e γ_2. Denotiamo con S_3 la superficie laterale che delimita il tubo di rotore. Applicando il teorema della divergenza e ricordando che per ogni $\mathbf{v}$ è $\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\mathbf{v} = 0$ otteniamo:

$$0 \;=\; \int_V \mathrm{div}\,\mathrm{rot}\mathbf{v}\, d\mathbf{x} = \int_{S_1 \cup S_2 \cup S_3} (\mathrm{rot}\mathbf{v}.\mathbf{n}_{ext})\, d\sigma =$$

$$= \int_{S_1} (\text{rot}\mathbf{v}.\mathbf{n}_{ext})\, d\sigma + \int_{S_2} (\text{rot}\mathbf{v}.\mathbf{n}_{ext})\, d\sigma$$

Infatti la normale esterna alla superficie S_3 è ortogonale al vettore $\mathbf{r} = \text{rot}\mathbf{v}$ per costruzione. Applicando il teorema di Stokes (4.5), e osservando che la normale esterna $\mathbf{n}_{ext}$ alla superficie S_1 e la normale orientata $\mathbf{n}$ del teorema di Stokes hanno verso opposto, otteniamo dunque il **Lemma di Stokes**:

$$\oint_{\gamma_1} \omega = \oint_{\gamma_2} \omega$$

per ogni γ_1 e γ_2 appartenenti allo stesso tubo di rotore e percorse nello stesso senso, dove ω è la f.d. associata a $\mathbf{v}$.

4.2 Applicazione alla meccanica hamiltoniana con un grado di libertà

Vedi: [2] pag. 300-303

Consideriamo un sistema meccanico con un grado di libertà e consideriamo lo **spazio delle fasi allargato** dato dalle coordinate $\mathbf{x} = (p, q, t)$. Definiamo in esso la f.d.:

$$\omega(\mathbf{x}) = v_1 dp + v_2 dq + v_3 dt = p dq - H dt \tag{4.6}$$

associata al vettore:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = (0, p, -H(\mathbf{x})) \tag{4.7}$$

Se calcoliamo $\mathbf{r} \equiv \text{rot}\mathbf{v}$ otteniamo $\mathbf{r} = (-\frac{\partial H}{\partial q}, \frac{\partial H}{\partial p}, 1)$, per cui le linee di rotore associate a questo campo vettoriale sono le soluzioni delle equazioni:

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \tag{4.8}$$

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \tag{4.9}$$

$$\dot{t} = 1 \tag{4.10}$$

dove il punto indica la derivata rispetto ad un parametro temporale τ che parametrizza il moto in $\mathcal{R}^3$. Dall'equazione (4.10) $\partial t/\partial\tau = 1$ otteniamo che possiamo eliminare τ in funzione di t, per cui le (4.8)-(4.9) diventano le equazioni di Hamilton. In altre parole, la proiezione delle linee di rotore nel piano (p, q) rappresenta le traiettorie del moto. Il lemma di Stokes enunciato nella precedente sezione applicato ad ω definita in (4.6), porta al:

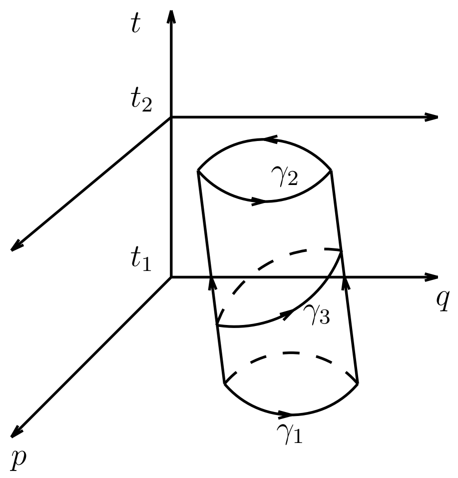

Figura 2: Tubo di rotore tra i tempi $t = t_1$ e $t = t_2$. γ_1 e γ_2 sono due curve giacenti rispettivamente nei piani a $t = t_1$ e $t = t_2$, mentre la curva γ_3 non giace su un piano a t costante.

Teorema 4.4 dell'invariante integrale di Poincarè-Cartan *Per ogni γ_1 e γ_2 appartenenti allo stesso tubo di rotore vale la:*

$$\oint_{\gamma_1} pdq - Hdt = \oint_{\gamma_2} pdq - Hdt \tag{4.11}$$

L'integrale $\oint_\gamma pdq - Hdt$ si chiama invariante integrale di Poincarè-Cartan. Dalla (4.11) discende anche il seguente:

Corollario *Il flusso di fase conserva $\oint_\gamma pdq$, dove γ è una curva chiusa nel piano (p, q).*

Infatti, se $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ appartengono allo stesso tubo di rotore (vedi Fig. 2) e γ_1 e γ_2 appartengono a due piani a tempo costante, $t = t_1$ e $t = t_2$, rispettivamente, allora abbiamo:

$$\oint_{\gamma_1} pdq = \oint_{\gamma_2} pdq = \oint_{\gamma_3} pdq - Hdt \tag{4.12}$$

Poiché le linee di rotore sono le curve integrali delle equazioni di Hamilton, i punti della curva γ_2 rappresentano l'evoluzione al tempo t_2 dei punti della curva γ_1. L'integrale $\oint_\gamma pdq$ è detto invariante integrale relativo di Poincarè-Cartan.

4.3 Caratterizzazione delle trasformazioni canoniche

Vedi: [2] pag. 303-310

Consideriamo, sempre per un sistema con $N = 1$ gradi di libertà, una trasformazione di coordinate differenziabile ed invertibile:

$$(p, q) \to (P, Q)$$

dipendente in generale dal tempo.

Data una funzione $f(P, Q, t)$ definiamo il suo **differenziale a tempo bloccato** $\tilde{d}f$:

$\tilde{d}f := df - \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial P}dP + \frac{\partial f}{\partial Q}dQ.$

Vale la seguente:

Condizione di Lie: *La trasformazione* $(q, p) \to (P(p, q, t), Q(p, q, t))$ *è canonica se e solo se:*

$$p\tilde{d}q - P\tilde{d}Q$$

è un differenziale esatto a tempo bloccato, cioè se esiste una funzione $f(P, Q, t)$ *tale che* $p\tilde{d}q - P\tilde{d}Q = \tilde{d}f$.

Osserviamo che nella precendente si intende espresso il differenziale in termini della stessa coppia di coordinate, da cui dipende la funzione f stessa.

Dim. - Osserviamo anzitutto che:

$$p\tilde{d}q - P\tilde{d}Q = \tilde{d}(pq - PQ) - q\tilde{d}p + Q\tilde{d}P$$

quindi:

$$\begin{aligned} p\tilde{d}q - P\tilde{d}Q &= \frac{1}{2}(p\tilde{d}q - P\tilde{d}Q) + \frac{1}{2}(p\tilde{d}q - P\tilde{d}Q) = \\ &= \frac{1}{2}\tilde{d}(pq - PQ) + \frac{1}{2}(p\tilde{d}q - q\tilde{d}p) - \frac{1}{2}(P\tilde{d}Q - Q\tilde{d}P) = \\ &= \frac{1}{2}\tilde{d}(pq - PQ) + \frac{1}{2}\tilde{d}\mathbf{x}^T I\mathbf{x} - \frac{1}{2}\tilde{d}\mathbf{X}^T I\mathbf{X} \end{aligned} \tag{4.13}$$

dove si sono usate le notazioni $\mathbf{x} = (p, q), \mathbf{X} = (P, Q)$ della Sezione (2). Poiché il primo termine della (4.13) è già un differenziale esatto, bisogna dimostrare che $\omega = \tilde{d}\mathbf{x}^T I\mathbf{x} - \tilde{d}\mathbf{X}^T I\mathbf{X}$ è un differenziale esatto. Introducendo la matrice jacobiana $J_{ij} = \partial x_i/\partial X_j$ della trasformazione abbiamo:

$$\tilde{d}\mathbf{x} = J\tilde{d}\mathbf{X} \Rightarrow \omega = \tilde{d}\mathbf{X}^T(J^T I\mathbf{x} - I\mathbf{X})$$

e quindi, in virtù del teorema (4.1), ω è esatta se e solo se è chiusa, cioè se il vettore $\mathbf{v}(\mathbf{X}) = J^T I\mathbf{x}(\mathbf{X}, t) - I\mathbf{X}$ verifica le condizioni:

$$\frac{\partial v_i}{\partial X_j} = \frac{\partial v_j}{\partial X_i} \tag{4.14}$$

dove:

$$v_i = \sum_{k,m} J^T_{ik} I_{km} x_m - \sum_k I_{ik} X_k$$

Derivando la precedente abbiamo:

$$\begin{aligned}\frac{\partial v_i}{\partial X_j} &= \sum_{k,m} \left[\left(\frac{\partial J^T_{ik}}{\partial X_j} \right) I_{km} x_m + J^T_{ik} I_{km} J_{mj} \right] - I_{ij} = \\ &= \sum_{k,m} \left(\frac{\partial^2 x_k}{\partial X_j \partial X_i} I_{km} x_m \right) + (J^T I J - I)_{ij}\end{aligned}$$

D'altra parte:

$$\frac{\partial v_j}{\partial X_i} = \sum_{k,m} \left(\frac{\partial^2 x_k}{\partial X_i \partial X_j} I_{km} x_m \right) + (J^T I J - I)_{ji}$$

Ricordando che la matrice I è antisimmetrica, $I_{ij} = -I_{ji}$, abbiamo che:

$$\begin{aligned}(J^T I J)_{ij} &= \sum_{k,m} J^T_{ik} I_{km} J_{mj} = \sum_{k,m} \frac{\partial x_k}{\partial X_i} I_{km} \frac{\partial x_m}{\partial X_j} = \\ &= -\sum_{k,m} \frac{\partial x_m}{\partial X_j} I_{mk} \frac{\partial x_k}{\partial X_i} = -(J^T I J)_{ji}\end{aligned}$$

quindi la matrice $J^T I J - I$ è antisimmetrica. Di conseguenza:

$$\frac{\partial v_i}{\partial X_j} - \frac{\partial v_j}{\partial X_i} = 2(J^T I J - I)_{ij}$$

e si annulla se e solo se la matrice J è simplettica, ovvero se e solo se la trasformazione è canonica. ▮

Una conseguenza immediata della condizione di Lie è che *le trasformazioni canoniche conservano l'invariante integrale relativo di Poincarè-Cartan*. Infatti, se γ è una curva chiusa nel piano (p, q) e Γ è la sua immagine nel piano (P, Q), la condizione di Lie implica che se la trasfomazione $(p, q) \to (P, Q)$ è canonica, allora:

$$\oint_\gamma [pdq - P(p, q)dQ(p, q)] = 0$$

in quanto $pdq - PdQ$ è un differenziale esatto. Inoltre poiché $\oint_\gamma P(p, q)dQ(p, q) = \oint_\Gamma PdQ$ ne segue che:

$$(p, q) \to (P, Q) \quad \text{canonica} \quad \Rightarrow \oint_\gamma pdq = \oint_\Gamma PdQ \tag{4.15}$$

Un'ulteriore conseguenza della condizione di Lie e del teorema (4.4) dell'invariante integrale di Poincarè-Cartan è il seguente:

Teorema 4.5 *La trasformazione $(p, q) \to (P, Q)$ è canonica se e solo se la differenza delle forme di Poincarè-Cartan è esatta.*

Dim. - Sia γ_1 una curva chiusa in un piano a tempo costante $t = t_1$ e γ_2 una curva appartenente allo stesso tubo di rotore. Per il teorema (4.4) si ha:

$$\oint_{\gamma_2} pdq - Hdt = \oint_{\gamma_1} pdq$$

D'altro canto se Γ_1, Γ_2 sono le immagini di γ_1 e γ_2 per una trasformazione canonica, utilizzando la (4.15) si ha anche che:

$$\oint_{\gamma_1} pdq = \oint_{\Gamma_1} PdQ = \oint_{\Gamma_2} PdQ - Kdt$$

dove l'ultima uguaglianza è data nuovamente dal teorema (4.4) e K è l'hamiltoniana corrispondente ad H nelle nuove variabili (P, Q). Abbiamo così dimostrato che:

$$\oint_{\gamma_2} pdq - Hdt - [P(p,q,t)dQ(p,q,t) - K(P(p,q,t), Q(p,q,t))dt] = 0 \quad (4.16)$$

Poiché γ_2 è una curva chiusa qualsiasi nello spazio delle fasi esteso (p, q, t), si ha che la differenza delle due forme di Poincarè-Cartan è esatta:

$$pdq - PdQ - (H - K)dt = dF \quad (4.17)$$

dove F è una funzione di t e di due variabili prese tra p, q, P, Q. Per la dimostrazione della implicazione inversa vedi [2] (th. 3.5 pg. 307-308) ∎

4.4 Generalizzazione al caso a $N > 1$ gradi di libertà

Nel derivare il teorema dell'invariante integrale di Poincarè-Cartan abbiamo fatto uso del teorema di Stokes. Una sua generalizzazione al caso di $N > 1$ gradi di libertà richiede anzitutto di generalizzare il concetto di rotore. Consideriamo quindi lo spazio delle fasi allargato a $2N + 1$ dimensioni dato dalle coordinate $(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)$. Dato un vettore $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^{2N+1}$, definiamo la matrice:

$$A_{ij}(\mathbf{x}) \equiv \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \quad (4.18)$$

La matrice A è antisimmetrica per costruzione. Il suo rango (cioè l'ordine massimo di un minore non nullo) può essere al più pari a $2N$ [1]. Se A ha rango massimo è detta non singolare.

Definizione 4.2 *Il* **nucleo** *di A è dato dall'insieme dei vettori $\mathbf{r} \in \mathbf{R}^{2N+1}$ tali che $A\mathbf{r} = 0$.*

Secondo un noto teorema di algebra lineare la dimensione del nucleo di A sommata al rango di A è uguale alla dimensione di A, cioè:

$$2N + 1 = \dim(\text{nucleo di A}) + \text{rango(A)}$$

Se A è non singolare, rango(A)$= 2N$, cioè dim(nucleo di A) $= 1$. L'equazione $A\mathbf{r} = 0$ individua dunque, a meno di costanti moltiplicative, un vettore $\mathbf{r}$. Poiché $A(\mathbf{x})$ dipende da $\mathbf{x}$, si ottiene un campo vettoriale $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{x}) \in \mathbf{R}^{2N+1}$. Tale campo $\mathbf{r}$ è la generalizzazione della nozione di rotore. Infatti nel caso $N = 1$ la matrice A è la matrice antisimmetrica con elementi:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \partial_2 v_1 - \partial_1 v_2 & \partial_3 v_1 - \partial_1 v_3 \\ \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1 & 0 & \partial_3 v_2 - \partial_2 v_3 \\ \partial_1 v_3 - \partial_3 v_1 & \partial_2 v_3 - \partial_3 v_2 & 0 \end{pmatrix}$$

cioè $A_{32} = (\text{rot}\mathbf{v})_1$, $A_{13} = (\text{rot}\mathbf{v})_2$ e $A_{21} = (\text{rot}\mathbf{v})_3$. Si verifica immediatamente che il vettore $\mathbf{r} = \text{rot}\mathbf{v}$ è nel nucleo di A.

Analogamente al caso tridimensionale, possiamo definire le linee di rotore in termini delle curve integrali di:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{r}(\mathbf{x})$$

e, con esse, il tubo di rotore. La definizione analoga della forma differenziale (4.6) sarà stavolta:

$$\mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} - Hdt = \sum_i p_i dq_i - Hdt \tag{4.19}$$

associata al vettore $(2N+1)$-dimensionale $\mathbf{v} = (\mathbf{0}, \mathbf{p}, -H)$. La matrice A corrispondente, secondo la definizione (4.18), è:

$$A = \begin{pmatrix} 0_N & -1_N & \nabla_{\mathbf{p}} H \\ 1_N & 0_N & \nabla_{\mathbf{q}} H \\ -\nabla_{\mathbf{p}} H & -\nabla_{\mathbf{q}} H & 0 \end{pmatrix} \tag{4.20}$$

È facile verificare che la matrice A ha rango $2N$: infatti uno dei minori di A è proprio la matrice I_{2N}, avente $detI \neq 0$. Pertanto A è non singolare

[1] Una matrice reale antisimmetrica di dimensione dispari ha determinante nullo, per cui il suo rango massimo non può essere pari alla dimensione della matrice, in questo caso $2N + 1$.

ed il suo nucleo è lo spazio unidimensionale dei vettori proporzionali ad $\mathbf{r} = (-\nabla_{\mathbf{q}} H, \nabla_{\mathbf{p}} H, 1)$ e quindi anche nel caso di $N > 1$ gradi di libertà le linee di rotore sono le soluzioni delle equazioni di Hamilton. Abbiamo così dimostrato il seguente:

Teorema 4.6 *La forma differenziale* $\omega = \sum_{i=1}^{N} p_i dq_i - H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)dt$ *in* $\mathbf{R}^{2N+1}$ *è non singolare ed è detta* **forma di Poincarè-Cartan**. *Le sue linee di rotore sono le curve integrali del sistema di equazioni di Hamilton associato ad* H.

Si può dimostrare che il lemma di Stokes è generalizzabile a $2N+1$ dimensioni. Possiamo dunque estendere tutti i risultati ottenuti nel caso di un solo grado di libertà al caso $N > 1$, ed in particolare possiamo estendere il teorema (4.5) sulla conservazione dell'invariante integrale di Poincarè-Cartan per trasformazioni canoniche. Osserviamo che la condizione di Lie si generalizza al caso $N > 1$ richiedendo che per una trasformazione canonica:

$$\mathbf{p} \cdot \tilde{d}\mathbf{q} - \mathbf{P} \cdot \tilde{d}\mathbf{Q} = \sum_{i=1}^{N} p_i \tilde{d}q_i - P_i \tilde{d}Q_i \tag{4.21}$$

sia un differenziale esatto a tempo bloccato.

5 Flusso hamiltoniano e azione

Vedi: [5] 43-45

Vogliamo adesso applicare le nozioni introdotte nella precedente Sezione per caratterizzare il flusso hamiltoniano e chiarire il significato dell'azione per un sistema hamiltoniano. Dimostriamo anzitutto il seguente:

Teorema 5.1 *Il flusso hamiltoniano definisce una trasformazione canonica.*

Dim. - Consideriamo per semplicità un sistema con $N = 1$ gradi di libertà. Data l'hamiltoniana $H(p, q)$, si ha il flusso generato dalle equazioni di Hamilton:

$$\dot{q} = \partial_p H \quad , \quad \dot{p} = -\partial_q H. \tag{5.1}$$

Supponiamo di aver determinato le soluzioni $q(t)$ e $p(t)$ con condizioni iniziali $Q = q(0)$ e $P = p(0)$, cioè le funzioni:

$$q = q(Q, P, t) \quad , \quad p = p(Q, P, t) \tag{5.2}$$

La relazione funzionale tra (p, q) e le condizioni iniziali (P, Q) può essere interpretata come le legge di una trasformazione di coordinate dipendente dal parametro t. Vogliamo dimostrare che tale trasformazione è canonica. In virtù della condizione di Lie, introdotta nel §4.3, ciò equivale ad affermare che:

$$p\tilde{d}q - P\tilde{d}Q = \tilde{d}f \tag{5.3}$$

è un differenziale esatto di una funzione $f(Q,P,t)$. Come detto in precedenza, nella (5.3) il tempo entra solo come parametro della trasformazione. Avendo scelto come variabili (P,Q), avremo che:

$$\begin{aligned}\tilde{d}f &= \frac{\partial f}{\partial Q}dQ + \frac{\partial f}{\partial P}dP \\ \tilde{d}q &= \frac{\partial q}{\partial Q}dQ + \frac{\partial q}{\partial P}dP\end{aligned}$$

per cui la (5.3) diventa:

$$p\tilde{d}q - PdQ = p\frac{\partial q}{\partial Q}dQ + p\frac{\partial q}{\partial P}dP - PdQ = \tilde{d}f = \frac{\partial f}{\partial Q}dQ + \frac{\partial f}{\partial P}dP \tag{5.4}$$

e quindi per confronto la funzione f dovrà soddisfare le uguaglianze:

$$\frac{\partial f}{\partial Q} = p\frac{\partial q}{\partial Q} - P \tag{5.5}$$

$$\frac{\partial f}{\partial P} = p\frac{\partial q}{\partial P} \tag{5.6}$$

Consideriamo la funzione $f(Q,P,t)$ definita nel modo seguente:

$$f(Q,P,t) = \int_0^t d\tau \left(p\frac{\partial q}{\partial \tau} - H\right) \tag{5.7}$$

Essa è proprio l'azione $S = \int \mathcal{L} d\tau$ calcolata lungo la traiettoria reale del moto, in quanto le funzioni q e p sono le soluzioni del moto (5.2). Inoltre, per Q,P fissati, la variazione di q sotto il segno di integrale nella (5.7) è dovuta solo al tempo, quindi:

$$dq = \frac{\partial q}{\partial \tau}d\tau. \tag{5.8}$$

Mostriamo che la f così definita soddisfa le (5.5)-(5.6). Ricordando che $H = H(p,q)$ si ha:

$$\frac{\partial f}{\partial Q} = \int_0^t d\tau \left(\frac{\partial p}{\partial Q}\frac{\partial q}{\partial \tau} + p\frac{\partial^2 q}{\partial Q \partial \tau} - \frac{\partial H}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial Q} - \frac{\partial H}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial Q}\right). \tag{5.9}$$

Per Q,P fissati, sotto il segno di integrale si ha:

$$\frac{\partial H}{\partial q} = -\frac{\partial p}{\partial \tau} \quad , \quad \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{\partial q}{\partial \tau}, \tag{5.10}$$

per cui la (5.9) diventa:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial Q} &= \int_0^t d\tau \left(\frac{\partial p}{\partial Q}\frac{\partial q}{\partial \tau} + p\frac{\partial^2 q}{\partial Q \partial \tau} + \frac{\partial p}{\partial \tau}\frac{\partial q}{\partial Q} - \frac{\partial q}{\partial \tau}\frac{\partial p}{\partial Q}\right) = \\ &= \int_0^t d\tau \left(p\frac{\partial^2 q}{\partial Q \partial \tau} + \frac{\partial p}{\partial \tau}\frac{\partial q}{\partial Q}\right) = \\ &= \int_0^t d\tau \frac{\partial}{\partial \tau}\left(p\frac{\partial q}{\partial Q}\right) = p\left.\frac{\partial q}{\partial Q}\right|_0^t = p\frac{\partial q}{\partial Q} - P, \end{aligned} \tag{5.11}$$

dove si è usato il fatto che $p(Q,P,\tau=t) = p$, $\frac{\partial q}{\partial Q}((Q,P,\tau=t) = \frac{\partial q}{\partial Q}$, $p(Q,P,\tau=0) = P$, $\frac{\partial q}{\partial Q}(Q,P,\tau=0) = \frac{\partial Q}{\partial Q} = 1$. Risulta quindi dimostrata la (5.5). Procediamo in modo analogo per dimostrare la (5.6):

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial P} &= \int_0^t d\tau \left(\frac{\partial p}{\partial P}\frac{\partial q}{\partial \tau} + p\frac{\partial^2 q}{\partial P \partial \tau} - \frac{\partial H}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial P} - \frac{\partial H}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial P}\right) = \\ &= \int_0^t d\tau \left(\frac{\partial p}{\partial P}\frac{\partial q}{\partial \tau} + p\frac{\partial^2 q}{\partial P \partial \tau} + \frac{\partial p}{\partial \tau}\frac{\partial q}{\partial P} - \frac{\partial q}{\partial \tau}\frac{\partial p}{\partial P}\right) = \\ &= \int_0^t d\tau \left(p\frac{\partial^2 q}{\partial P \partial \tau} + \frac{\partial p}{\partial \tau}\frac{\partial q}{\partial P}\right) = \\ &= \int_0^t d\tau \frac{\partial}{\partial \tau}\left(p\frac{\partial q}{\partial P}\right) = p\left.\frac{\partial q}{\partial P}\right|_0^t = p\frac{\partial q}{\partial P}, \end{aligned} \tag{5.12}$$

dove si è usato il fatto che $\frac{\partial q}{\partial P}(Q,P,\tau=0) = \frac{\partial Q}{\partial P} = 0$. ▮

Nel dimostrare il precedente teorema abbiamo trovato che la funzione $f(P,Q,t)$ definita in (5.7) che permette di verificare la condizione di Lie per la trasformazione canonica $(p,q) \to (P,Q)$ è proprio l'azione S espressa in forma hamiltoniana, calcolata lungo la traiettoria estremale, cioè la traiettoria che soddisfa le equazioni di Hamilton. Vediamo alcune interessanti conseguenze di ciò.

- Sia $S(q,Q,t,t_0)$ l'azione calcolata lungo la traiettoria che soddisfa le equazioni di Hamilton, come funzione dei valori iniziale e finale della posizione e del tempo. Questa funzione viene anche chiamata **funzione principale di Hamilton**. Dalla condizione di Lie, verificata nel teorema precedente, abbiamo

$$pdq - PdQ = \tilde{d}S \tag{5.13}$$

  e dunque

$$\frac{\partial S}{\partial q} = p \tag{5.14}$$

- Consideriamo ora la dipendenza di $S(q, Q, t, t_0)$ dalla variabile t. Dalla definizione dell'azione abbiamo

$$\frac{dS}{dt} = p\dot{q} - H \tag{5.15}$$

e poichè

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial S}{\partial t} \tag{5.16}$$

usando (5.14) otteniamo immediatamente

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -H \tag{5.17}$$

nota anche come **equazione di Hamilton-Jacobi**.

6 Funzione generatrice di una trasformazione canonica

Vedi: [2] pag. 313-321

La caratterizzazione di una trasformazione canonica mediante la condizione di Lie permette di introdurre la nozione di funzione generatrice di una trasformazione canonica.

6.1 Caso indipendente dal tempo

Analizziamo per semplicità prima il caso indipendente dal tempo.

Definizione 6.1 *Una funzione $F(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ di $2N$ variabili, sufficientemente regolare che soddisfa la condizione*

$$det\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial y_j}\right) \neq 0 \tag{6.18}$$

e detta **funzione generatrice***.*

E' infatti possibile definire una trasformazione completamente canonica mediante il cosiddetto **procedimento di prima specie**. Si considerino come variabili $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ le variabili $\mathbf{x} = \mathbf{q}, \mathbf{y} = \mathbf{Q}$ e si definiscano:

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{\partial F(\mathbf{q}, \mathbf{Q})}{\partial q_i} \\ P_i &= -\frac{\partial F(\mathbf{q}, \mathbf{Q})}{\partial Q_i} \end{aligned} \tag{6.19}$$

Usando la condizione (6.18) si può invertire la prima relazione ottenendo $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ ed inserire questa nella seconda equazione ottenendo $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{q}, \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \mathbf{p}))$. La trasformazione così ottenuta è completamente canonica poichè usando (6.19) la condizione di Lie è automaticamente soddisfatta.

Considerando come variabili $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ della funzione generatrice le variabili $\mathbf{x} = \mathbf{q}, \mathbf{y} = \mathbf{P}$ e definendo:

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{\partial F(\mathbf{q}, \mathbf{P})}{\partial q_i} \\ Q_i &= \frac{\partial F(\mathbf{q}, \mathbf{P})}{\partial P_i} \end{aligned} \tag{6.20}$$

si può procedere con il **procedimento di seconda specie** e, analogamente a prima, per inversione della prima equazione ottenere $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ e per sostituzione nella seconda equazione ottenere $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$. La trasformazione così ottenuta è ancora completamente canonica poichè soddisfa la condizione di Lie:

$$\mathbf{p}.\tilde{d}\mathbf{q} - \mathbf{P}.\tilde{d}\mathbf{Q} = \tilde{d}f \tag{6.21}$$

con $f(\mathbf{q}, \mathbf{P}) = F(\mathbf{q}, \mathbf{P}) - \mathbf{P}.\mathbf{Q}(\mathbf{q}, \mathbf{P})$.

Analogamente per la **terza specie** considerando le variabili $\mathbf{x} = \mathbf{p}, \mathbf{y} = \mathbf{Q}$ e definendo:

$$\begin{aligned} q_i &= -\frac{\partial F(\mathbf{p}, \mathbf{Q})}{\partial p_i} \\ P_i &= -\frac{\partial F(\mathbf{p}, \mathbf{Q})}{\partial Q_i} \end{aligned} \tag{6.22}$$

e per la **quarta specie** considerando le variabili $\mathbf{x} = \mathbf{p}, \mathbf{y} = \mathbf{P}$ e definendo:

$$\begin{aligned} q_i &= -\frac{\partial F(\mathbf{p}, \mathbf{P})}{\partial p_i} \\ Q_i &= \frac{\partial F(\mathbf{p}, \mathbf{P})}{\partial P_i} \end{aligned} \tag{6.23}$$

si ottengono trasformazioni completamente canoniche.

6.2 Caso dipendente dal tempo

Nel caso dipendente dal tempo si puo' procedere in modo simile. Il teorema (4.5) ci ha permesso di stabilire che CNES perchè una trasformazione sia canonica è che la differenza delle due forme di Poincarè-Cartan nelle vecchie e nuove variabili sia esatta. In generale, abbiamo che data una funzione di $2N+1$ variabili $F(\mathbf{q},\mathbf{Q},t)$ che verifichi la condizione:

$$det\left(\frac{\partial^2 F}{\partial Q_i \partial q_i}\right) \neq 0 \qquad \forall t \tag{6.24}$$

è possibile definire una trasformazione canonica mediante il procedimento di prima specie:

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{\partial F(\mathbf{q},\mathbf{Q},t)}{\partial q_i} \Rightarrow \mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\mathbf{q},\mathbf{p},t) \\ P_i &= \frac{\partial F(\mathbf{q},\mathbf{Q},t)}{\partial Q_i} \Rightarrow \mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{q},\mathbf{Q}(\mathbf{q},\mathbf{p},t),t) \end{aligned} \tag{6.25}$$

Invertendo la prima relazione e sostituendo nella seconda si ottiene una trasformazione che è canonica poichè la differenza delle due forme di Poincarè-Cartan nelle vecchie e nuove variabili è esatta, ponendo per la nuova funzione di Hamilton $K = H + \partial F/\partial t$. Analogamente si può procedere per le altre specie.

7 Trasformazioni canoniche infinitesime e vicine all'identità. Serie di Lie.

(Vedi [2], pag. 333-342)

8 Metodo di Hamilton-Jacobi

8.1 L'equazione di Hamilton-Jacobi.

Vedi: [2] pag. 358-365, [5] 47-48

Il metodo di costruzione di una trasformazione canonica $(\mathbf{p},\mathbf{q}) \to (\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\xi})$ tramite una funzione generatrice $S(\mathbf{q},\boldsymbol{\eta},t)$ visto alla fine della precedente sezione può essere utilizzato per risolvere le equazioni di Hamilton nel modo seguente.

Ricordiamo che, nell'ipotesi che la funzione $S(\mathbf{q},\boldsymbol{\eta},t)$ soddisfi in un aperto U la condizione che il determinante della matrice $\partial^2 S/\partial q_i \partial \eta_j$ sia diverso da zero, allora la trasformazione canonica è determinata dalle condizioni:

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}(\mathbf{q},\boldsymbol{\eta},t) \quad , \quad \xi_i = \frac{\partial S}{\partial \eta_i}(\mathbf{q},\boldsymbol{\eta},t) \quad , \quad i = 1,\ldots,N \tag{8.1}$$

$$K = H + \frac{\partial S}{\partial t} \tag{8.2}$$

Ci poniamo ora il problema di determinare $S(\mathbf{q}, \boldsymbol{\eta}, t)$ così che $K = 0$. Se ciò fosse possibile, le equazioni del moto sarebbero banalmente risolte, in quanto le equazioni di Hamilton nelle variabili $(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi})$, essendo K nulla, sarebbero:

$$\dot{\eta}_i = 0$$
$$\dot{\xi}_i = 0$$

e quindi le nuove variabili sarebbero delle costanti, calcolabili tramite le (8.1) (con $t = t_0$) in funzione dei dati iniziali per le variabili $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$. Basta allora risolvere le (8.1) rispetto alle $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ (per un valore arbitrario di t) per ottenere la soluzione cercata. In particolare, la condizione che il determinante della matrice $\partial^2 S/\partial q_i \partial \eta_j$ sia diverso da zero assicura l'invertibilità della seconda delle relazioni (8.1):

$$\xi_i = \frac{\partial S}{\partial \eta_i}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\eta}, t),$$

permettendo di esprimere le q_i come funzioni del tempo e di $2N$ costanti $(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi})$:

$$q_i = q_i(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}, t)$$

e sostituendo tale espressione nella prima delle relazioni (8.1) si ottiene la dipendenza delle p_i dal tempo e da $(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi})$:

$$p_i = p_i(\mathbf{q}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}, t), \boldsymbol{\eta}, t).$$

Le (8.1) e (8.2) implicano che $K = 0$, se e solo se è verificata la seguente equazione alle derivate parziali, detta **equazione di Hamilton-Jacobi**:

$$H(\frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}}, \mathbf{q}, t) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \tag{8.3}$$

Essa rappresenta un'equazione differenziale non lineare alle derivate parziali del prim'ordine. Determinare $S(\mathbf{q}, t)$ significa trovare un **integrale completo** dell'equazione di Hamilton-Jacobi, dipendente da tante costanti arbitrarie quante sono le variabili, cioè nel nostro caso $N + 1$. Tuttavia, notiamo che S entra nell'equazione (8.3) solo come derivata, per cui se S è soluzione lo è anche $S' = S + cost$, ossia delle $N + 1$ costanti di integrazione una compare in modo additivo. Il problema che ci si pone è quindi quello di determinare una funzione $S(\mathbf{q}, \boldsymbol{\eta}, t)$ dipendente da N costanti $\boldsymbol{\eta} = \eta_1, \ldots \eta_N$ che soddisfi l'equazione (8.3).

I casi in cui si riesce a provare l'esistenza di un integrale completo non sono molti, anche se si tratta in genere di esempi di notevole interesse. Non si deve tuttavia pensare che ciò sia dovuto solo a difficoltà di calcolo. Infatti l'esistenza di un integrale completo, nel caso di Hamiltoniana indipendente dal tempo, implica, come sarà chiaro dalla discussione successiva, che il sistema è integrabile. È tuttavia ben noto, fin dai tempi di Poincaré, che in genere i sistemi Hamiltoniani non sono integrabili.

8.2 Caso indipendente dal tempo

Un caso che capita sovente è quello in cui H non dipende da t; in tal caso il problema può essere riformulato nel modo seguente. Si osserva che la funzione $S(\mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha}, t)$, dove $\boldsymbol{\alpha} = \alpha_1, \dots \alpha_N$ sono le N costanti di integrazione, può supporsi della forma:

$$S(\mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha}, t) = W(\mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha}) - E(\boldsymbol{\alpha})t \tag{8.4}$$

con $E(\boldsymbol{\alpha})$ funzione arbitraria delle $\boldsymbol{\alpha}$, indipendente dal tempo. Infatti, sostituendo la (8.4) nella (8.3), si ha:

$$H(\frac{\partial W}{\partial \mathbf{q}}, \mathbf{q}) = E(\boldsymbol{\alpha}) \tag{8.5}$$

che è detta **equazione di Hamilton-Jacobi indipendente dal tempo**. Il problema diventa quello di determinare una funzione $W(\mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha})$ che risolve la (8.5) e che dipende da N costanti $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$, così che la matrice $\partial^2 W/\partial q_i \partial \alpha_j$ abbia determinante diverso da zero. Una tale funzione $W(\mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha})$ è detta **funzione caratteristica di Hamilton**. Si noti che la (8.5) potrebbe anche trovarsi come condizione per l'esistenza di una trasformazione canonica $(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \to (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ indipendente dal tempo con funzione generatrice W tale che:

$$p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha}, t) \quad , \quad \beta_i = \frac{\partial W}{\partial \alpha_i}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha}, t) \quad , \quad i = 1, \dots, N \tag{8.6}$$

e tale che la nuova Hamiltoniana $K(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = E(\boldsymbol{\alpha})$. Se si adotta questa interpretazione della (8.5), i nuovi momenti β_i non sono più costanti del moto, ma:

$$\dot{\beta}_i = \frac{\partial E}{\partial \alpha_i} \equiv \omega_i \tag{8.7}$$

la cui soluzione, essendo le ω_i costanti, è semplicemente

$$\beta_i(t) = \beta_i(0) + \omega_i t \tag{8.8}$$

Per chiarire meglio la notazione, possiamo considerare un sistema ad un grado di libertà soggetto a forze attive conservative. La Lagrangiana sarà allora del tipo:

$$\mathcal{L}(\dot{q}, q) = \frac{1}{2} a(q) \dot{q}^2 - \mathcal{V}(q) \tag{8.9}$$

con $a(q) > 0$. L'Hamiltoniana corrispondente ha la forma:

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2a(q)} + \mathcal{V}(q) \tag{8.10}$$

La (8.5) diventa allora:

$$\frac{1}{2a(q)} \left(\frac{\partial W}{\partial q} \right)^2 + \mathcal{V}(q) = E \tag{8.11}$$

avendo indicato α con E, per sottolinearne il significato fisico di energia. Pertanto, formalmente:

$$W(E, q) = \pm \int_{q_0}^{q} dq' \sqrt{2a(q')[E - \mathcal{V}(q')]} \tag{8.12}$$

Per dare un significato preciso alla (8.12) bisogna specificare l'aperto U dello spazio delle fasi (nelle variabili (q, p)), in cui si vuole studiare il problema. In particolare, il segno davanti all'integrale deve coincidere con il segno di p ; ciò implica che U deve essere contenuto nel semipiano $\{p > 0\}$ o $\{p < 0\}$. Inoltre q deve variare in un intervallo in cui $E - \mathcal{V}(q) > 0$ e l'estremo inferiore di integrazione q_0 deve appartenere a questo intervallo per ogni valore assunto da E in U. Per esempio, nel caso dell'oscillatore armonico, in cui $a(q) = m$ e $\mathcal{V}(q) = kq^2/2$, si può prendere U coincidente con il semipiano $\{p > 0\}$ e porre $q_0 = 0$.

Supposto di avere scelto correttamente l'aperto U, le soluzioni delle equazioni di Hamilton in U si ottengono dalle (8.6); si trova:

$$\begin{aligned} t - t_0 &= \frac{\partial W}{\partial E} = \pm \int_{q_0}^{q(t)} dq' \sqrt{\frac{a(q')}{2[E - \mathcal{V}(q')]}} \\ p(t) &= \frac{\partial W}{\partial q} = \pm \sqrt{2a(q)[E - \mathcal{V}(q(t))]} \end{aligned} \tag{8.13}$$

Se succede, come nel caso dell'oscillatore armonico, che la soluzione raggiunge la frontiera di U in direzione uscente per $t = \bar{t}$, la si può prolungare a tempi $t > \bar{t}$, studiando il problema in un altro aperto. Si riottengono ovviamente i risultati ben noti per i moti conservativi ad un grado di libertà.

8.3 Il metodo di separazione delle variabili

Vedi: [2] pag. 365-369

La possibilità di estendere le considerazioni precedenti a sistemi con più gradi di libertà dipende dalla possibilità di risolvere effettivamente la (8.5). In generale ciò succede quando si può applicare il metodo di **separazione delle variabili**.

Supponiamo che la dipendenza di $H(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ da una coppia di variabili coniugate, per esempio (p_N, q_N), sia del tipo:

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = F(\mathbf{p}', \mathbf{q}', G(p_N, q_N)) \quad , \quad (\mathbf{p}', \mathbf{q}') = (p_1, \ldots, p_{l-1}, q_1, \ldots, q_{N-1}) \tag{8.14}$$

essendo F e G due opportune funzione di $2l-1$ e 2 variabili, rispettivamente. In tal caso ci si può limitare a cercare soluzioni della (8.5) della forma:

$$W(\mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha}) = W_N(q_N, \alpha_N) + W'(\mathbf{q}', \boldsymbol{\alpha}) \tag{8.15}$$

Infatti, se si sostituisce la (8.15) nella (8.5), si ottiene:

$$F(\frac{\partial W'}{\partial \mathbf{q}'}, \mathbf{q}', G(\frac{\partial W_N}{\partial q_N}, q_N)) = E(\boldsymbol{\alpha}) \tag{8.16}$$

che può essere risolta cercando una funzione $W_N(q_N, \alpha_N)$ tale che:

$$G(\frac{\partial W_N}{\partial q_N}, q_N) = \alpha_N \tag{8.17}$$

essendo α_N una costante, ed una funzione $W'(\mathbf{q}', \boldsymbol{\alpha})$ tale che:

$$F(\frac{\partial W'}{\partial \mathbf{q}'}, \mathbf{q}', \alpha_N) = E(\boldsymbol{\alpha}) \tag{8.18}$$

La (8.17) può in generale essere risolta per un insieme non vuoto di valori di α_N, invertendo la funzione $G(p_N, q_N)$ rispetto a p_N, in modo da ricavare $\frac{\partial W_N}{\partial q_N}$ (e quindi $W_N(q_N)$ tramite un'integrazione), come visto nell'esempio alla fine del §8.1. D'altra parte la (8.18) è un'equazione dello stesso tipo di quella di partenza, ma con una variabile in meno. Si può quindi provare ad iterare il procedimento; se ci si riesce fino a ridursi ad un'equazione in una sola variabile (quindi banalmente risolubile al pari della (8.17)), il procedimento di soluzione dell'equazione di Hamilton-Jacobi è portato a compimento con una soluzione della forma:

$$W(\mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha}) = \sum_{i=1}^{N} W_i(q_i, \boldsymbol{\alpha}) \tag{8.19}$$

dove $\boldsymbol{\alpha}$ indica le l costanti arbitrarie che compaiono nel corso del procedimento (e che assumono il ruolo di nuovi impulsi).

Si noti, tuttavia, che il procedimento sopra descritto porta a determinare delle costanti del moto e a ridurre l'ordine del sistema di equazioni da risolvere, anche se non si riesce ad iterare fino alla fine. Supponiamo, per esempio, di essere riusciti a fare solo il primo passo; se consideriamo la trasformazione canonica associata alla funzione generatrice

$$W(\mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha}) = W_N(q_N, \alpha_N) + W'(\mathbf{q}', \boldsymbol{\alpha}') \tag{8.20}$$

con $\boldsymbol{\alpha}' = \alpha_1, ..., \alpha_N$, $W_N(q_N, \alpha_N)$ che soddisfa la (8.17) e $W'(\mathbf{q}', \boldsymbol{\alpha}') = \mathbf{q}'.\boldsymbol{\alpha}'$ dalle (8.6) otteniamo che

$$p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i} = \alpha_i \quad \beta_i = \frac{\partial W}{\partial \alpha_i} = q_i \quad \forall i = 1, ..., N-1 \tag{8.21}$$

cioè la trasformazione $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ in $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ è la trasformazione identica per le prime $N-1$ variabili e per la N-esima essa è definita dalle equazioni:

$$p_N = \frac{\partial W_N}{\partial q_N} \quad \beta_N = \frac{\partial W_N}{\partial \alpha_N} \tag{8.22}$$

La Hamiltoniana nelle nuove variabili avrà la forma:

$$K(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = F(\boldsymbol{\alpha}', \boldsymbol{\beta}', \alpha_N) \tag{8.23}$$

con $\boldsymbol{\beta}' = \beta_1, ..., \beta_{N-1}$. La variabile α_N è dunque una costante del moto, mentre le altre $\alpha_1, ..., \alpha_{N-1}$ non sono costanti in questo caso. Le equazioni di Hamilton nelle variabili $\boldsymbol{\alpha}', \boldsymbol{\beta}'$ sono un sistema di equazioni chiuso, con α_N che funge da parametro. La funzione $\beta_N(t)$ è determinata in funzione della soluzione di questo sistema, usando l'equazione di Hamilton per la variabile β_N, cioè:

$$\dot{\beta}_N = \frac{\partial K}{\partial \alpha_N}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}') \tag{8.24}$$

9 Le variabili azione-angolo

9.1 Sistemi con un grado di libertà

Vedi: [2] pag. 376-385

Passiamo ora a discutere un'altra trasformazione canonica dalle proprietà particolarmente interessanti, che si può applicare, in particolare, quando è possibile trovare un integrale completo dell'equazione di Hamilton-Jacobi tramite il metodo di separazione delle variabili.

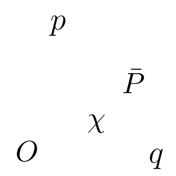

Figura 3: Traiettoria nello spazio delle fasi per le equazioni del moto dell'Hamiltoniana (9.1). Il valore dell'energia E determina il raggio dell'orbita, mentre l'angolo χ tra il raggio vettore e l'asse q varia al variare del tempo. Pertanto la posizione $\bar{P} = (\bar{p}, \bar{q})$ del sistema ad un dato istante nello spazio delle fasi è completamente individuata dal valore dell'energia E del moto corrispondente e dal valore dell'angolo χ all'istante considerato.

Per semplicità iniziamo la discussione dal caso di un solo grado di libertà, N=1, e consideriamo ad esempio il caso dell'oscillatore armonico, cioè un sistema descritto dall'Hamiltoniana:

$$H = \frac{1}{2}(p^2 + q^2) \tag{9.1}$$

dove si sono scelte unità tali che $m = k = 1$. Per energia E fissata la traiettoria nello spazio delle fasi (p, q) è una circonferenza di raggio $R_E = \sqrt{2E}$ ed area $\mathcal{A} = \pi R_E^2 = 2\pi E$. Notiamo che individuare la posizione del sistema nello spazio delle fasi, cioè una coppia $\bar{P} = (\bar{p}, \bar{q})$ data, corrisponde a fissare l'energia E e l'angolo polare χ tra il raggio vettore $O\bar{P}$ e l'asse q (vedi Fig. 1). Ci si chiede se la coppia (E, χ) possa essere una coppia di coordinate canoniche, cioè connesse a (p, q) da una trasformazione canonica. Poiché E è un integrale primo (durante il moto E non cambia), la nuova funzione di Hamilton non dovrebbe dipendere da χ, che sarebbe quindi una coordinata ciclica. La domanda che ci poniamo è dunque stabilire se sia o meno possibile usare come coordinate canoniche un integrale primo del moto (o una sua funzione) e una corrispondente variabile ciclica.

La risposta a tale domanda è fornita dal metodo delle *variabili azione-angolo*. Se E è l'energia, fissata, del moto, cerchiamo una trasformazione canonica:

$$(p, q) \to (J, \chi) \tag{9.2}$$

tale che:

$$J = J(E) \Leftrightarrow E = H(p(J, \chi), q(J, \chi)) = K(J) \tag{9.3}$$

e la variazione di χ in un giro è:

$$\Delta\chi := \oint_{M_E} d\chi = 2\pi, \tag{9.4}$$

dove M_E indica l'insieme dei punti (p, q) per i quali l'energia vale E. Nel caso $N = 1$ tale insieme è una curva. La condizione (9.3) impone che J sia costante in M_E, e in qualche modo 'contraddistingua' la curva di fase considerata. Essa è inoltre del tutto equivalente alla richiesta che l'Hamiltoniana, espressa nelle nuove variabili, dipenda solo da J, purchè si assuma che la funzione $J = J(E)$ sia invertibile, cioè esista $E = K(J)$. La condizione (9.4) impone che la curva possa essere parametrizzata da un angolo χ. In termini più matematici si richiede che la curva M_E sia *diffeomorfa ad un toro unidimensionale*, cioè sia chiusa, laddove si definisce:

Definizione 9.1 *L'insieme $T \equiv [0, 2\pi]$ è detto toro unidimensionale.*

La trasformazione richiesta si ottiene dalla seguente funzione generatrice:

$$F(q, J) = \int_{q_0}^{q} p(q', K(J))dq', \tag{9.5}$$

dove si è usata la (9.3). L'integrale è preso lungo la curva M_E a partire da un punto q_0, fino ad un punto q generico. Per definizione di funzione generatrice $F(q, J)$ (vedi §6) si ha:

$$p = \frac{\partial F}{\partial q} \quad , \quad \chi = \frac{\partial F}{\partial J} \tag{9.6}$$

La prima condizione è naturalmente soddisfatta, in quanto $p = \frac{\partial F}{\partial q}$ per costruzione. Inoltre poichè $p = p(q, E) = p(q, K(J)) = p(q, J)$, invertendo rispetto ad J abbiamo che $J = J(p, q)$, che può essere inserita nella seconda delle (9.6) dando:

$$\chi = \chi(q, J) = \chi(q, J(p, q)) \tag{9.7}$$

La trasformazione canonica risulta quindi determinata. Vediamo se verifica le condizioni (9.3)-(9.4). La (9.3) è stata utilizzata implicitamente nella definizione di F, anche se ancora non abbiamo specificato la funzione $K(J)$. Notiamo poi che per un giro completo lungo $M_{E(J)}$ si ha:

$$\Delta F(J) = \oint_{M_{E(J)}} pdq = S(J) \tag{9.8}$$

dove S è l'area racchiusa da M_E. F è dunque una funzione plurivoca, cioè definita a meno di multipli di S. Questo non crea problemi nella definizione di p, in quanto $\Delta F = S$ non dipende da q. Dalle (9.6) e (9.5) segue che:

$$\Delta\chi(q) = \frac{\partial}{\partial J} \int_{q_0}^{q} p(q', J)dq' \tag{9.9}$$

e quindi:

$$\oint_{M_E} d\chi = \frac{d}{dJ}\Delta F(J) = \frac{d}{dJ}S(J) \tag{9.10}$$

Affinché la condizione (9.4) sia verificata, occorre adesso imporre che sia:

$$\frac{d}{dJ}S(J) = 2\pi \Rightarrow S(J) = 2\pi J \tag{9.11}$$

che ci consente di definire esplicitamente la variabile d'azione J, e quindi la funzione inversa $E = K(J)$ che compare nella definizione della funzione generatrice:

$$J = \frac{1}{2\pi}\oint_{M_E} pdq \tag{9.12}$$

Riassumendo, risulta dimostrato il seguente teorema:

Teorema 9.1 *Sia dato un sistema unidimensionale $N = 1$ di Hamiltoniana $H(p,q)$ tale che:*

(i) *$H(p,q) = E$ definisce una curva chiusa M_E nel piano (p,q).*

(ii) *La funzione $J = \frac{1}{2\pi}\oint_{M_E} pdq = J(E)$ è invertibile, cioè $\frac{\partial J}{\partial E} \neq 0$*

allora esiste una trasformazione canonica $(p,q) \to (J,\chi)$ con funzione generatrice data dalla (9.5) tale che l'incremento della variabile angolo χ lungo un periodo è pari a 2π.

9.2 Sistemi con $N > 1$ gradi di libertà

Vedi: [2] pag. 400-401 e [3] pag. 388-394

Vediamo ora come estendere il precedente risultato al caso $N > 1$. Estendiamo anzitutto la definizione di toro undimensionale alla seguente:

Definizione 9.2 *L'insieme:*

$$T^l \equiv \underbrace{[0,2\pi] \times \ldots \times [0,2\pi]}_{l \text{ volte}} \tag{9.13}$$

è detto toro l-dimensionale.

Se il sistema è separabile, cioè si riconduce a N sistemi unidimensionali, è ovvio che la costruzione delle variabili azione-angolo può essere fatta per ognuno dei singoli sottosistemi. In generale, vale il seguente:

Teorema 9.2 di Liouville-Arnold *Sia dato un sistema ad N gradi di libertà e autonomo (non dipendente dal tempo), che soddisfi le ipotesi:*

(i) *Esistono N integrali primi F_i con $i = 1, \dots, N$ in involuzione, cioè $\{F_i, F_j\} = 0$ per ogni coppia (i, j).*

(ii) *L'insieme $M_{\mathbf{f}} = \{\mathbf{x} \in \mathcal{R}^{2N} : F_i = f_i, i = 1, \dots, N\}$ è tale che gli N vettori $\nabla_{\mathbf{x}} F_i|_{\mathbf{x} \in M_{\mathbf{f}}}$ sono linearmente indipendenti.*

(iii) *$M_{\mathbf{f}}$ è compatta e connessa.*

Allora $M_{\mathbf{f}}$ è diffeomorfa ad un toro N-dimensionale.

Il teorema implica che il moto in $M_{\mathbf{f}}$ può essere parametrizzato da N coordinate angolari χ_i, così come il moto lungo la curva ad energia costante nel caso $N = 1$ è parametrizzato dall'angolo χ. I periodi delle variabili angolari, cioè i tempi entro i quali le variabili angolari variano di 2π sono in generale *non commensurabili* tra loro: il moto è dunque quasi-periodico. Un'ipotesi cruciale del teorema è il fatto che $M_{\mathbf{f}}$ è connessa e compatta. Fisicamente corrisponde al fatto che il moto è limitato. Ad esempio un punto materiale libero in $N = 3$ dimensioni ha tre integrali primi in involuzione, i tre momenti (p_x, p_y, p_z), ma $M_{\mathbf{f}}$ non è compatta, in quanto coincide con $\mathcal{R}^3$: il moto infatti non è in tal caso quasi-periodico.

Osserviamo che se un sistema è separabile, allora si decompone in N moti unidimensionali. Per ciascun moto possiamo definire una coppia di variabili azione-angolo. L'insieme degli angoli costituisce il toro N-dimensionale diffeomorfo a $M_{\mathbf{f}}$ (vedi definizione (9.13)). Allora in modo generale possiamo definire le variabili azione-angolo per un sistema a N gradi di libertà. Analizziamo ora in dettaglio il procedimento per la costruzione di tali variabili nel caso $N > 1$, a partire dalle seguenti ipotesi:

Ip.1 Il sistema è separabile. Pertanto è possibile risolvere l'equazione di Hamilton-Jacobi (8.5):

$$H((\frac{\partial S}{\partial q_1}), ..., (\frac{\partial S}{\partial q_N}), q_1, ..., q_N) = \alpha_N \tag{9.14}$$

usando una funzione generatrice $S(\mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha})$ della forma (8.19):

$$S(\mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha}) = \sum_{k=1}^{N} S_k(q_k, \boldsymbol{\alpha})$$

In tal caso l'analisi del §8.3 mostra che le funzioni $S_k(q_k, \boldsymbol{\alpha})$ sono soluzioni di equazioni del tipo:

$$F_k(\frac{dS_k}{dq_k}, q_k, \alpha_1, \dots, \alpha_N) = \alpha_k \tag{9.15}$$

Per fissare le idee, abbiamo adottato la scelta di Jacobi, $E_k(\boldsymbol{\alpha}) = \alpha_k$, con $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1 \dots \alpha_N)$.

Ip.2 Dipendenza quadratica dalle variabili p_k. Assumiamo cioè che per ogni $k = 1 \dots N$, la funzione

$$F_k(p_k, q_k, \boldsymbol{\alpha}) \equiv F_k(\frac{dS_k}{dq_k}, q_k, \boldsymbol{\alpha}) \tag{9.16}$$

data dalla (9.15) sia della forma:

$$F_k(p_k, q_k, \boldsymbol{\alpha}) = (p_k)^2 + U_k(\boldsymbol{\alpha}, q_k) = \alpha_k \tag{9.17}$$

Ip.3 Moti unidimensionali periodici. Assumiamo che l'equazione (9.17) definisce una curva nello spazio (q_k, p_k), ad $\alpha_1, ..., \alpha_N$ costanti, che denotiamo con γ_{α_k}, chiusa e limitata, di equazione:

$$p_k = \pm\sqrt{\alpha_k - U_k(\boldsymbol{\alpha}, q_k)} \tag{9.18}$$

e inoltre che $\alpha_k - U_k(\alpha_1, ..., \alpha_N, q_k)$ ha degli zeri semplici nei punti di inversione q_k^-, q_k^+, corrispondenti a $p_k = 0$, cioè il moto unidimensionale associato ad ogni coordinata è un moto periodico e la curva γ_{α_k} viene percorsa in un tempo finito $T_k(\alpha_k)$, periodo di questo moto.

Sotto queste ipotesi possiamo costruire le variabili azione angolo nel seguente modo. Per ogni $k = 1, ..., N$ definiamo la variabile d'azione:

$$J_k(\boldsymbol{\alpha}) \equiv \frac{1}{2\pi}\oint_{\gamma_{\alpha_k}} p_k dq_k = \frac{2}{2\pi}\int_{q_k^-}^{q_k^+} \sqrt{\alpha_k - U_k(\boldsymbol{\alpha}, q)}dq \tag{9.19}$$

Utilizzando le ipotesi Ip.2 e Ip.3 si può dimostrare che la funzione $\mathbf{J} = \mathbf{J}(\boldsymbol{\alpha})$, con $\mathbf{J} = (J_1, \dots, J_N)$, definita dalla (9.19) al variare di k è una funzione invertibile, possiamo cioè trovare N funzioni K_i tali che

$$\alpha_i = K_i(\mathbf{J}) \tag{9.20}$$

Se consideriamo adesso la funzione caratteristica di Hamilton, cioè la funzione $S(\mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha})$ che soddisfa l'equazione (9.14) di Hamilton-Jacobi del nostro problema, e la valutiamo sostituendo ad $\boldsymbol{\alpha}$ la funzione $\mathbf{K}(\mathbf{J})$ che abbiamo trovato, otteniamo una nuova funzione:

$$F(\mathbf{q}, \mathbf{J}) \equiv S(\mathbf{q}, \mathbf{K}(\mathbf{J})) \tag{9.21}$$

che possiamo anche scrivere nella forma:

$$F(\mathbf{q}, \mathbf{J}) = \int_{\mathbf{q}_0}^{\mathbf{q}} \sum_{i=1}^{l} p_i dq_i \tag{9.22}$$

e che possiamo utilizzare come funzione generatrice. La trasformazione completamente canonica $(\mathbf{p},\mathbf{q}) \rightarrow (\mathbf{J},\boldsymbol{\chi})$ da essa generata si ricava dalle equazioni:

$$p_k = \frac{\partial F}{\partial q_k}(\mathbf{q},\mathbf{J}) \tag{9.23}$$

$$\chi_k = \frac{\partial F}{\partial J_k}(\mathbf{q},\mathbf{J}) \tag{9.24}$$

dove le $\boldsymbol{\chi} = (\chi_1,\ldots,\chi_N)$ sono le variabili coniugate alle variabili di azione, e la nuova hamiltoniana, ottenuta utilizzando l'equazione di Hamilton-Jacobi (9.14) e la sostituzione definita dalla (9.20), è data da $H = K_N(\mathbf{J})$.

Abbiamo perciò che le nuove variabili J_k e χ_k si evolvono secondo le seguenti equazioni (equazioni di Hamilton con hamiltoniana $K_N(\mathbf{J})$):

$$\dot{J}_k = 0 \tag{9.25}$$

$$\dot{\chi}_k = \frac{\partial K_N}{\partial J_k} \equiv \omega_k(\mathbf{J}) \tag{9.26}$$

Le variabili d'azione $\mathbf{J}$ sono dunque delle costanti del moto e le varaibili $\boldsymbol{\chi}$ evolvono secondo le semplici relazioni:

$$\chi_k(t) = \chi_k(0) + \omega_k t \tag{9.27}$$

Le variabili $\boldsymbol{\chi}$ sono dette variabili angolari. Infatti se calcoliamo la variazione che subisce χ_k quando si fa compiere un giro completo alla coppia q_j, p_j lungo la curva γ_{α_j}, tenendo fisse tutte le altre variabili, otteniamo, utilizzando la (9.26):

$$\oint_{\gamma_{\alpha_j}} d\chi_k = \oint_{\gamma_{\alpha_j}} \frac{\partial}{\partial q_j}\frac{\partial F}{\partial J_k}(\mathbf{q},\mathbf{J})dq_j \tag{9.28}$$

infatti lungo γ_{α_j} abbiamo $\mathbf{J}$ costante. Invertendo l'ordine delle derivate otteniamo quindi:

$$\frac{\partial}{\partial J_k}\oint_{\gamma_{\alpha_j}} \frac{\partial F}{\partial q_j}(\mathbf{q},\mathbf{J})dq_j = \frac{\partial}{\partial J_k}\oint_{\gamma_{\alpha_j}} p_j\, dq_j = 2\pi\frac{\partial}{\partial J_k}J_j = 2\pi\delta_{k,j} \tag{9.29}$$

cioè facendo compiere un giro completo alla coppia q_j, p_j lungo la curva γ_{α_j}, tenendo fisse tutte le altre variabili, la variabile χ_j si incrementa di 2π mentre per tutte le altre la variazione è nulla. Pertanto χ_j può essere visto come un parametro angolare lungo la curva γ_{α_j} e il moto del sistema appare nelle nuove variabili come un insieme di rotazioni uniformi in ogni variabile angolare χ_j con velocità angolare ω_j costante, e dunque un moto multiperiodico.

Osservazioni

- L'ipotesi Ip.3 che abbiamo fatto per poter costruire le variabili azione-angolo può anche non essere verificata per quelle coordinate q_k che siano già provviste di una periodicità intrinseca, cioè per coordinate angolari. Infatti in questo caso alla definizione (9.19) possiamo sostituire la seguente:

$$J_k(\boldsymbol{\alpha}) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p_k dq_k \tag{9.30}$$

- L'ipotesi Ip.2 può essere resa meno forte: all'equazione (9.18) possiamo infatti sostituire:

$$F_k(p_k, qk, \boldsymbol{\alpha}) = f(\boldsymbol{\alpha}, q_k)(p_k)^2 + U_k(\boldsymbol{\alpha}, q_k) \tag{9.31}$$

  con $f(\boldsymbol{\alpha}, q_k) > 0$. In questo caso abbiamo che la curva γ_{α_k} nel piano q_k, p_k sarà definita dall'equazione

$$p_k = \pm\sqrt{\frac{1}{f(\boldsymbol{\alpha}, q_k)}(\alpha_k - U_k(\boldsymbol{\alpha}, q_k))} \tag{9.32}$$

  ed anche in questo caso gli zeri di p_k, cioè i punti di inversione del moto unidimensionale, vengono dati dagli zeri di $\alpha_k - U_k(\boldsymbol{\alpha}, q_k)$, e l'analisi risulta del tutto equivalente a quella sviluppata nel caso dell'ipotesi Ip.2, se si inserisce nella definizione delle variabili di azione il fattore $\frac{1}{f(\boldsymbol{\alpha},q_k)}$ cioè :

$$J_k(\boldsymbol{\alpha}) \equiv \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma_{\alpha_k}} p_k dq_k = \frac{2}{2\pi} \int_{q_k^-}^{q_k^+} \sqrt{\frac{1}{f(\boldsymbol{\alpha}, q_k)}(\alpha_k - U_k(\boldsymbol{\alpha}, q_k))}dq \tag{9.33}$$

- Da un punto di vista pratico, le pulsazioni $\omega_k(\mathbf{J})$ possono essere calcolate anche senza dover fare esplicitamente l'inversione che determina la funzione $K_N(\mathbf{J})$. Basta infatti ricordare che poichè la funzione $\mathbf{K}(\mathbf{J})$ è l'inversa della funzione $\mathbf{J}(\alpha_1, ..., \alpha_N)$, la matrice con elementi $\frac{\partial K_i}{\partial J_j}$ è l'inversa della matrice di elementi $\frac{\partial J_i}{\partial \alpha_j}$, che è immediatamente calcolabile a partire dalle equazioni (9.19).

9.3 Esempio di soluzione dell'equazione di Hamilton-Jacobi

Consideriamo un punto materiale P di massa m che si muove nel piano xy sotto l'azione di una forza conservativa di potenziale (detto potenziale di dipolo)

$$U(\vec{r}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{r}}{r^3}$$

dove $\vec{a}$ è un vettore fissato, che possiamo supporre abbia la stessa direzione e verso dell'asse x.

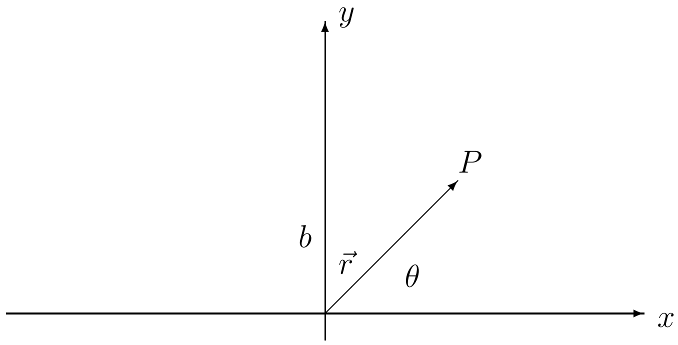

Figura 4:

Vogliamo studiare il moto corrispondente alle condizioni (vedi Fig. 4):

$$\begin{array}{lcl} \lim_{t\to-\infty} x(t) = +\infty & , & \lim_{t\to-\infty} y(t) = b > 0 \\ \lim_{t\to-\infty} \dot{x}(t) = -v_0 & , & \lim_{t\to-\infty} \dot{y}(t) = 0 \end{array} \tag{9.34}$$

cioè il moto di una particella puntiforme che proviene dall'infinito in verso opposto ad $\vec{a}$ con velocità v_0, seguendo una traiettoria parallela all'asse x (per $t \to -\infty$), ma non coincidente con l'asse x (il caso $b = 0$ è di fatto un problema unidimensionale, quindi banale).

Poiché

$$m\ddot{y} = -\frac{\partial U}{\partial y} = 3a\frac{xy}{r^5} \tag{9.35}$$

$\dot{y}$ e quindi anche $\dot{\theta}$ sono positivi in un intorno di $t = -\infty$, al contrario di $\dot{r}$, che è ovviamente negativo. Poiché

$$p_r = m\dot{r} \quad , \quad p_\theta = mr^2\dot{\theta} \tag{9.36}$$

esiste un tempo t_0, tale che:

$$p_r \leq 0 \quad , \quad p_\theta \geq 0 \quad , \quad t \in (-\infty, t_0] \tag{9.37}$$

Nel seguito t_0 sarà scelto come il più grande possibile, compatibilmente con la validità delle (9.37).

In coordinate polari l'Hamiltoniana ha la forma:

$$H = \frac{1}{2m}(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2}) + \frac{a\cos\theta}{r^2} \tag{9.38}$$

cui corrisponde l'equazione di Hamilton-Jacobi:

$$\frac{1}{2m}(\frac{\partial S}{\partial r})^2 + \frac{1}{2mr^2}[(\frac{\partial S}{\partial \theta})^2 + 2ma\cos\theta] = E \tag{9.39}$$

che può essere risolta per separazione delle variabili, ponendo

$$S(r,\theta) = S_1(r) + S_2(\theta) \tag{9.40}$$

$S_1(r)$ e $S_2(\theta)$ devono soddisfare le equazioni:

$$p_r^2 = (\frac{\partial S_1}{\partial r})^2 = 2mE - \frac{\beta}{r^2} \tag{9.41}$$

$$p_\theta^2 = (\frac{\partial S_2}{\partial \theta})^2 = \beta - 2ma\cos\theta \tag{9.42}$$

E e β sono due costanti del moto (corrispondenti ai due nuovi momenti coniugati), da determinare in base alle condizioni (9.34), che prendono qui il posto delle usuali condizioni iniziali. Poiché $U(\vec{r}(t)) \to 0$ per $t \to -\infty$, si ha:

$$E = \frac{1}{2}m \lim_{t\to-\infty} \vec{v}(t)^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 \tag{9.43}$$

Inoltre, se si indica con $\vec{k}$ il versore dell'asse z (ortogonale al piano del moto), si ha:

$$p_\theta = m(\vec{r}\wedge\vec{v})\cdot\vec{k} = m(x\dot{y} - y\dot{x}) \quad \xrightarrow[t\to-\infty]{} \quad mbv_0 \tag{9.44}$$

in quanto $x\dot{y}\xrightarrow[t\to-\infty]{}0$; quest'ultima affermazione segue dal fatto che, per $t \to -\infty$:

$$\begin{aligned}\dot{y}(t) &= \int_{-\infty}^{t} ds\,\ddot{y}(s) = 3a\int_{-\infty}^{t}\frac{x(s)y(s)}{r(s)^5} \simeq 3ab\int_{-\infty}^{t}\frac{ds}{x(s)^4} \simeq \frac{3ab}{v_0^4}\int_{-\infty}^{t}\frac{ds}{s^4} = \\ &= -\frac{ab}{v_0^4 t^3} \quad \Rightarrow \quad x(t)\dot{y}(t) \simeq \frac{ab}{v_0^3 t^2}\end{aligned}$$

Si ha pertanto:

$$\beta = m^2b^2v_0^2 + 2ma = 2Emb^2 + 2ma > 0 \tag{9.45}$$

Usando le (9.37) per risolvere l'indeterminazione del segno, le (9.41) e (9.42) si risolvono nella forma:

$$S_1(r) = -\int_{\bar{r}}^{r} dr' \sqrt{2mE - \frac{\beta}{r'^2}} \tag{9.46}$$

$$S_2(\theta) = \int_0^{\theta} d\theta' \sqrt{\beta - 2ma\cos\theta'} \tag{9.47}$$

avendo scelto le costanti di integrazione arbitrarie così che $S_2(0) = 0$ e $S_1(\bar{r}) = 0$, con la condizione

$$\bar{r} > r_0 = \sqrt{\frac{\beta}{2mE}} \tag{9.48}$$

r_0 è il valore di r per cui p_r^2 si annulla; la positività del secondo membro nella (9.41) implica inoltre che esso rappresenta la minima distanza dall'origine cui può arrivare la particella. Questa distanza viene effettivamente raggiunta se e solo se $t_0 < +\infty$; infatti, poiché

$$\beta - 2ma\cos\theta \geq \beta - 2ma = 2mEb^2 > 0$$

p_θ non può annullarsi mai, così che le (9.37) possono essere violate solo se p_r cambia segno nel corso del moto (t_o è il primo istante in cui ciò avviene). Si noti che r_0 è certamente maggiore di b. Infatti la (9.45) può riscriversi:

$$1 = \lambda + \mu \quad , \quad \lambda = \frac{2ma}{\beta} > 0 \quad , \quad \mu = \frac{b^2}{r_0^2} \tag{9.49}$$

da cui segue che $\mu < 1$.

Facciamo ora vedere che $t_0 < +\infty$. Detta τ la variabile coniugata a E, si ha, se $t < t_0$:

$$\tau = \frac{\partial S}{\partial E} = \frac{\partial S_1}{\partial E} = -\int_{\bar{r}}^{r} dr' \frac{m}{\sqrt{2mE - \beta/r'^2}} \tag{9.50}$$

$$\dot{\tau} = \frac{\partial H}{\partial E} = 1 \quad \Rightarrow \quad \tau(t) = t \tag{9.51}$$

avendo posto nella (9.51) eguale a 0 la costante di integrazione. Dalla (9.50) segue allora che

$$t_0 = -\int_{\bar{r}}^{r_0} dr' \frac{m}{\sqrt{2mE - \beta/r'^2}} < +\infty \tag{9.52}$$

Come abbiamo già osservato, al tempo $t = t_0$ p_r è nullo; inoltre, $\forall t$,

$$\dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{2a\cos\theta}{r^3} + \frac{p_\theta^2}{mr^3} = \frac{\beta}{mr^3} > 0$$

così che p_r cambia effettivamente segno in $t = t_0$ e rimane positivo per $t > t_0$. Ne segue che, se $t > t_0$, la (9.41) si risolve scegliendo il segno positivo per la radice e quindi anche che:

$$\tau = \frac{\partial S_1}{\partial E} = \int_{r_0}^{r} dr' \frac{m}{\sqrt{2mE - \beta/r'^2}} = t - t_0 \tag{9.53}$$

avendo scelto la costante di integrazione nella (9.51) in modo che sia soddisfatta la condizione $r(t_0) = r_0$.

Riassumendo, la funzione $r(t)$ è determinata implicitamente dall'equazione:

$$t = t_0 \mp \int_{r_0}^{r} dr' \frac{m}{\sqrt{2mE - \beta/r'^2}} \quad , \quad t \lesseqgtr t_0 \tag{9.54}$$

L'integrale a secondo membro della (9.54) si può calcolare esplicitamente e si trova (omettiamo i passaggi):

$$r(t) = \sqrt{r_0^2 + v_o^2(t - t_0)^2} \tag{9.55}$$

Passiamo ora a studiare il comportamento della funzione $\theta(t)$. Poiché, come abbiamo detto, p_θ non si annulla mai, $\dot{\theta}(t)$ ha segno costante e pertanto $\theta(t)$ è una funzione monotona. La relazione fra θ e r lungo la traiettoria può essere determinata notando che, se α è la variabile coniugata a β, allora

$$\begin{aligned} \alpha = \frac{\partial S}{\partial \beta} &= \pm \int_{\bar{r}}^{r} \frac{dr'}{2r'^2\sqrt{2mE - \beta/r'^2}} + \\ &\quad + \int_{0}^{\theta} \frac{d\theta'}{2\sqrt{\beta - 2ma\cos\theta'}} \quad , \quad t \lesseqgtr t_0 && (9.56) \\ \dot{\alpha} &= 0 && (9.57) \end{aligned}$$

Pertanto, se $t < t_0$:

$$\begin{aligned} \alpha &= \int_{\bar{r}}^{r} \frac{dr'}{2r'^2\sqrt{2mE - \beta/r'^2}} + \int_{0}^{\theta} \frac{d\theta'}{2\sqrt{\beta - 2ma\cos\theta'}} = \\ &= \int_{\bar{r}}^{\infty} \frac{dr'}{2r'^2\sqrt{2mE - \beta/r'^2}} \end{aligned} \tag{9.58}$$

avendo usato il fatto che, per $t \to -\infty$, $\theta(t) \to 0$ e $r(t) \to +\infty$. Ne segue che, posto $\theta_0 = \theta(t_0)$:

$$\begin{aligned}\int_0^{\theta_0} \frac{d\theta'}{2\sqrt{\beta - 2ma\cos\theta'}} &= \int_{r_0}^{\infty} \frac{dr'}{2r'^2\sqrt{2mE - \beta/r'^2}} = \\ = \int_0^{\sqrt{2mE/\beta}} \frac{dx}{2\sqrt{2mE - \beta x^2}} &= \frac{\pi}{4\sqrt{\beta}} \end{aligned} \tag{9.59}$$

Se $t > t_0$, si prova in modo analogo che:

$$\int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta'}{2\sqrt{\beta - 2ma\cos\theta'}} - \int_{r_0}^{r} \frac{dr'}{2r'^2\sqrt{2mE - \beta/r'^2}} = 0 \tag{9.60}$$

per cui, posto

$$\theta_M = \lim_{t\to+\infty} \theta(t)$$

si ha:

$$\int_{\theta_0}^{\theta_M} \frac{d\theta'}{2\sqrt{\beta - 2ma\cos\theta'}} = \int_{r_0}^{\infty} \frac{dr'}{2r'^2\sqrt{2mE - \beta/r'^2}} = \frac{\pi}{4\sqrt{\beta}} \tag{9.61}$$

Mettendo insieme la (9.59) e la (9.61), si trova:

$$\int_0^{\theta_M} \frac{d\theta'}{\sqrt{1 - \lambda\cos\theta'}} = \pi \tag{9.62}$$

dove λ è una costante positiva e minore di 1, definita nella (9.49).

La (9.62) definisce implicitamente θ_M in funzione di λ, ma non può essere risolta in termini di funzioni semplici. Facciamo vedere che, in ogni caso, è certamente vero che

$$\theta_M < \pi$$

Si consideri la funzione:

$$F(\lambda, \theta) = \int_0^{\theta} \frac{d\theta'}{\sqrt{1 - \lambda\cos\theta'}} \tag{9.63}$$

Se $\theta' < \pi/2$, è facile mostrare che l'integrando è una funzione monotona crescente di λ; ciò è sufficiente a provare che anche F è una funzione crescente di λ, se $\theta \leq \pi/2$. Se $\pi/2 < \theta \leq \pi$, si può scrivere:

$$F(\lambda, \theta) = F(\lambda, \pi - \theta) + \frac{1}{2}\int_{\pi-\theta}^{\theta} d\theta' \left[\frac{1}{\sqrt{1 - \lambda\cos\theta'}} + \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda\cos\theta'}}\right]$$

ed è ancora facile dimostrare che l'espressione fra parentesi quadre è una funzione crescente di λ; lo stesso è allora vero per F. Pertanto:

$$F(\lambda,\theta) \geq F(0,\theta) = \theta \quad , \quad \theta \in [0,\pi] \quad , \quad \lambda \in (0,1) \tag{9.64}$$

da cui segue subito, vista la monotonia di F anche come funzione di θ, che $\theta_M < \pi$, dato che, per la (9.62), $F(\lambda,\theta_M) = \pi$ e, per la (9.64), $F(\lambda,\pi) > \pi$.

Dalle considerazioni precedenti segue pure che:

$$\lim_{\lambda\to 1} \theta_M = 0$$

10 Teoria delle perturbazioni

Vedi, per la trattazione teorica: [2] pag. 437-440

Si consideri l'Hamiltoniana:

$$H = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 + \frac{1}{4}\varepsilon k q^4 = H_0 + \varepsilon H_1 \tag{10.1}$$

Calcolare $q(t)$ al primo ordine in ε in teoria delle perturbazioni.

Riscriviamo H in termini delle variabili azione-angolo del problema imperturbato, cioè dell'Hamiltoniana dell'oscillatore armonico H_0:

$$q(t) = \sqrt{\frac{2I}{m\omega^2}}\sin\varphi \tag{10.2}$$

$$p(t) = \sqrt{2Im\omega^2}\cos\varphi \tag{10.3}$$

In termini delle (10.2)-(10.3) l'Hamiltoniana diventa:

$$H_0 = \omega I \tag{10.4}$$

$$H_1 = \frac{kI^2}{m^2\omega^4}\sin^4\varphi \tag{10.5}$$

Cerchiamo una trasformazione canonica $(I,\varphi) \to (J,\psi)$ di funzione generatrice $F(\varphi,J)$ tale che la nuova Hamiltoniana:

$$H = H_0(J) + \varepsilon K_1(J) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

dipenda dalle variabili angolari solo ad $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$. Tale trasformazione è ε-vicina all'identità, per cui potremo cercare una funzione generatrice della forma:

$$F(\varphi,J) = \varphi J + \varepsilon F_1(\varphi,J) \tag{10.6}$$

con K_1 ad F_1 da determinare. Nel caso di sistemi ad un grado di libertà il problema perturbativo è risolubile: la funzione $K_1(J)$ è data da:

$$K_1(J) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi H_1(J,\varphi) = \frac{3}{8}\frac{kJ^2}{m^2\omega^4} \tag{10.7}$$

dove si è usata l'identità:

$$\sin^4\varphi = \frac{3}{8} + \frac{1}{8}\cos 4\varphi - \frac{1}{2}\cos 2\varphi$$

La funzione generatrice è a sua volta data da:

$$\begin{aligned} F_1(J,\varphi) &= \frac{1}{\omega}\int d\varphi[K_1(J) - H_1(J,\varphi)] = \\ &= -\frac{kJ^2}{m^2\omega^5}\int d\varphi\left[\frac{1}{8}\cos 4\varphi - \frac{1}{2}\cos 2\varphi\right] = \\ &= -\frac{kJ^2}{m^2\omega^5}\left[\frac{1}{32}\sin 4\varphi - \frac{1}{4}\sin 2\varphi\right] \end{aligned} \tag{10.8}$$

Le equazioni di trasformazione dalle vecchie alle nuove variabili sono quindi date da:

$$I = \frac{\partial F}{\partial \varphi} = J + \varepsilon\frac{kJ^2}{m^2\omega^5}\left[-\frac{1}{8}\cos 4\varphi + \frac{1}{2}\cos 2\varphi\right] \tag{10.9}$$

$$\psi = \frac{\partial F}{\partial J} = \varphi + \varepsilon\frac{kJ}{m^2\omega^5}\left[\frac{1}{16}\sin 4\varphi - \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right] \tag{10.10}$$

La nuova Hamiltoniana nelle variabili (J,ψ) è data da:

$$H = \omega J + \varepsilon\frac{3}{8}\frac{kJ^2}{m^2\omega^4} \tag{10.11}$$

per cui le equazioni del moto diventano:

$$\dot{J} = 0 \Rightarrow J = cost \tag{10.12}$$

$$\dot{\psi} = \tilde{\omega} \Rightarrow \psi = \tilde{\omega}t + \psi_0 \tag{10.13}$$

dove si è indicato con $\tilde{\omega}$ la frequenza del moto periodico nella variabile ψ:

$$\tilde{\omega} = \frac{\partial H}{\partial J} = \omega + \varepsilon\frac{3}{4}\frac{kJ}{m^2\omega^4} = \omega + \varepsilon\omega^1 \tag{10.14}$$

Per avere $q(t), p(t)$, definiti tramite le (10.2)-(10.3) in funzione di (I, φ), dobbiamo esprimere questi ultimi in termini di (J, ψ). Osserviamo che dalle (10.9)-(10.10) segue che:

$$\begin{aligned}
\varphi &= \psi - \varepsilon \frac{kJ}{m^2\omega^5}\left[\frac{1}{16}\sin 4\varphi - \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right] \\
&\simeq \psi - \varepsilon \frac{kJ}{m^2\omega^5}\left[\frac{1}{16}\sin 4\psi - \frac{1}{2}\sin 2\psi\right] \qquad (10.15) \\
I &\simeq J + \varepsilon \frac{kJ^2}{m^2\omega^5}\left[-\frac{1}{8}\cos 4\psi + \frac{1}{2}\cos 2\psi\right] \qquad (10.16)
\end{aligned}$$

con:

$$\psi(t) = \tilde{\omega} t + \psi_0 = \omega t + \psi_0 + \varepsilon\omega^1 t \simeq \omega t + \psi_0 + \mathcal{O}(\varepsilon)$$

In virtù della (10.2) dobbiamo determinare $\sin\varphi$ ad $\mathcal{O}(\varepsilon)$. Notiamo che essendo $\varphi = \psi + \varepsilon\varphi^1$ abbiamo:

$$\begin{aligned}
\sin\varphi &= \sin\psi\cos(\varepsilon\varphi^1) + \cos\psi\sin(\varepsilon\varphi^1) = \\
&\simeq \sin\psi + \varepsilon\varphi^1\cos\psi = \\
&\simeq \sin(\omega t + \psi_0 + \varepsilon\omega^1 t) + \varepsilon\varphi^1\cos(\omega t + \psi_0 + \varepsilon\omega^1 t) = \\
&\simeq \sin(\omega t + \psi_0) + \varepsilon(\omega^1 t + \varphi^1)\cos(\omega t + \psi_0) \qquad (10.17)
\end{aligned}$$

Quindi sostituendo le (10.16) e (10.17) nella (10.2), e tenendo conto della definizione (10.14) di ω^1, abbiamo:

$$\begin{aligned}
q(t) &= \sqrt{\frac{2I}{m\omega^2}}\sin\varphi = \\
&= \sqrt{\frac{2J}{m\omega^2}}\sqrt{1 + \frac{\varepsilon kJ}{m^2\omega^5}\left[\frac{1}{2}\cos(2\theta) - \frac{1}{8}\cos(4\theta)\right]} \times \\
&\quad [\sin\theta + \varepsilon(\omega^1 t + \varphi^1)\cos\theta] = \\
&\simeq \sqrt{\frac{2J}{m\omega^2}}\left\{\sin\theta + \varepsilon\frac{kJ}{m^2\omega^5}\left[\frac{1}{4}\sin\theta\cos(2\theta) - \right.\right. \\
&- \frac{1}{16}\sin\theta\cos(4\theta) + \frac{3}{4}\omega t\cos\theta + \\
&+ \left.\left.\frac{1}{2}\cos\theta\sin(2\theta) - \frac{1}{16}\cos\theta\sin(4\theta)\right]\right\}
\end{aligned} \qquad (10.18)$$

dove si è sviluppato $\sqrt{1+\varepsilon f} \simeq 1 + \varepsilon f/2$ nella (10.16) e si è indicato $\theta = \omega t + \psi_0$. Tale espressione dipende dalle costanti J e ψ_0 da determinare in base alle condizioni iniziali.

Ci poniamo ora il problema di determinare il regime di validità di tale soluzione. Consideriamo l'equazione oraria per $I(t)$ data dalla (10.16):

$$
\begin{aligned}
I(t) &= J\left\{1+\varepsilon\frac{kJ}{m^2\omega^5}\left[\frac{1}{2}\cos(2(\theta+\varepsilon\omega^1 t))-\frac{1}{8}\cos(4(\theta+\varepsilon\omega^1 t))\right]\right\} = \\
&= J\left\{1+\varepsilon\frac{kJ}{m^2\omega^5}\left[\frac{1}{2}\cos(2\theta)-\frac{1}{8}\cos(4\theta)\right]\right\} - \\
&\quad -\varepsilon^2\frac{3\omega t}{4}\left(\frac{kJ}{m^2\omega^5}\right)^2\left[\frac{1}{2}\sin(2\theta)-\frac{1}{8}\sin(4\theta)\right]\Bigg\}
\end{aligned} \tag{10.19}
$$

L'approssimazione fatta è valida all'ordine ε, cioè trascurando i termini di ordine ε^2. L'equazione oraria (10.19) per $I(t)$ mostra che i termini di $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ diventano dello stesso ordine di grandezza di quelli di $\mathcal{O}(\varepsilon)$ quando $\varepsilon^2\omega t = \varepsilon(\varepsilon\omega t) \sim \varepsilon$, cioè su scale di tempi $t \sim 1/(\omega\varepsilon)$.

Per verificare la correttezza di questa previsione, determiniamo esplicitamente l'andamento di $q(t)$ in teoria delle perturbazioni e confrontiamo tale soluzione approssimata con la soluzione esatta ottenibile mediante il metodo di Hamilton-Jacobi. Analizziamo il caso specifico di $m = \omega = 1$, $k = -1$ e determiniamo la soluzione $q(t)$ ad $\mathcal{O}(\varepsilon)$ corrispondente alle condizioni iniziali:

$$q(0) = 1 \tag{10.20}$$

$$\dot{q}(0) = 0 \tag{10.21}$$

Per applicare la formula (10.18) dobbiamo anzitutto conoscere l'angolo ψ_0 corrispondente alle condizioni inziali (10.20)-(10.21). Poichè dalla (10.3) segue che $\dot{q}(0) = 0 \Rightarrow p(0) = 0 \Rightarrow \varphi(0) = \pi/2$, in virtù della (10.15) abbiamo anche che $\psi_0 = \varphi(0) = \pi/2$. Di conseguenza nella (10.18) dovremo porre $\theta = \omega t + \psi_0 = t + \pi/2$ e pertanto:

$$\sin\theta = \cos t \quad , \quad \cos\theta = -\sin t \quad , \quad \cos 2\theta = -\cos 2t$$

$$\sin 2\theta = -\sin 2t \quad , \quad \cos 4\theta = \cos 4t \quad , \quad \sin 4\theta = \sin 4t$$

Sostituendo queste relazioni nell'equazione (10.18) che determina $q(t)$ abbiamo:

$$
\begin{aligned}
q(t) = \sqrt{2J}\Bigg\{\cos t - \varepsilon J\Bigg[&-\frac{1}{4}\cos t\cos 2t - \frac{1}{16}\cos t\cos 4t - \frac{3}{4}t\sin t \\
&+\frac{1}{2}\sin t\sin 2t + \frac{1}{16}\sin t\sin 4t\Bigg]\Bigg\}
\end{aligned} \tag{10.22}
$$

dove J è ancora da determinare in base ai dati iniziali. Applicando la (10.22) stessa a $t = 0$ abbiamo:

$$q(0) = \sqrt{2J}\left(1 + \varepsilon J \frac{5}{16}\right) = 1$$

da cui:

$$2J = \frac{1}{\left(1 + \varepsilon J \frac{5}{16}\right)^2} \Rightarrow 2J \simeq 1 - \varepsilon \frac{5}{16} \tag{10.23}$$

Sostituendo il valore di J nella (10.22) e mantenendo i termini di $\mathcal{O}(\varepsilon)$ abbiamo:

$$\begin{aligned} q(t) = \cos t - \frac{\varepsilon}{2}\Bigg\{ & \cos t \left[\frac{1}{4}(1 - \cos 2t) + \frac{1}{16}(1 - \cos 4t)\right] \\ & -\frac{3}{4} t \sin t + \frac{1}{2}\sin t \sin 2t + \frac{1}{16}\sin t \sin 4t \Bigg\} \end{aligned} \tag{10.24}$$

Passiamo ora a studiare la soluzione del problema mediante il metodo di Hamilton-Jacobi. Determiniamo quindi la funzione caratteristica di Hamilton $S(q, E)$ risolvendo l'equazione di Hamilton-Jacobi:

$$E = \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 + \frac{1}{2} m\omega^2 q^2 + \frac{1}{4}\varepsilon k q^4 \tag{10.25}$$

Abbiamo:

$$S(q, E) = \pm \int_{q_0}^{q} dq' \sqrt{2m\left(E - \frac{1}{2} m\omega^2 q'^2 - \varepsilon q'^4 \frac{k}{4}\right)} - Et \tag{10.26}$$

Introducendo la costante Q otteniamo:

$$Q = -t \pm \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{q_0}^{q} dq' \frac{1}{\sqrt{E - \frac{1}{2} m\omega^2 q'^2 - \varepsilon q'^4 \frac{k}{4}}} \tag{10.27}$$

Figura 5: Andamento del potenziale $V(q)$ per $\varepsilon = 0.3$.

Come illustrato nell'esempio alla fine della Sezione 4, il segno davanti all'integrale nella (10.27) è determinato dalle condizioni iniziali del moto, date nel nostro caso dalle (10.20)-(10.21). Il potenziale $V(q)$ corrispondente ad un generico $\varepsilon < 1$ è rappresentato in Fig. 1: come si vede, per $\varepsilon < 1$ la posizione

$q = 0$ è un minimo, mentre si hanno due massimi per $q = \pm 1/\sqrt{\varepsilon}$. Pertanto il moto corrispondente alle condizioni iniziali (10.20)-(10.21) si svolgerà tra le posizioni $q = \pm 1$: poiché all'istante $t = 0$ è $q(0) = 1$, per tempi immediatamente successivi il moto avverrà con $\dot{q} < 0$ e quindi $p < 0$. Di conseguenza, poiché il segno davanti all'integrale (10.27) coincide con il segno di p, nel primo intervallo di tempo compreso tra $t = 0$ e l'istante di inversione del moto t_{inv} la soluzione del problema è data da:

$$t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_1^{q(t)} dq' \frac{1}{\sqrt{E - \frac{1}{2} m\omega^2 q'^2 - \varepsilon q'^4 \frac{k}{4}}} \tag{10.28}$$

Risolvendo numericamente l'equazione (10.28), che definisce la soluzione $q(t)$ corrispondente ai dati iniziali (10.20)-(10.21), e confrontandola con la (10.24), è possibile verificare fino a quali tempi e in quale misura la soluzione ottenuta ad $\mathcal{O}(\varepsilon)$ in teoria delle perturbazioni approssima la soluzione esatta. Si osservi che nella (10.28) E è determinata dal suo valore a $t = 0$.

Riferimenti bibliografici

[1] V. Arnold Metodi matematici della meccanica classica Editori Riuniti.

[2] A. Fasano, S.Marmi Meccanica Analitica Ed. Bollati Boringhieri.

[3] G. Dell'Antonio "Elementi di meccanica, I: Meccanica Classica" Ed. Liguori.

[4] E. Giusti, "Analisi Matematica 2", Ed. Bollati Boringhieri (1984).

[5] L. D. Landau, E. M. Lifšits, "Meccanica", Ed. Riuniti (1982).