

Esonero di Meccanica Classica e Analitica del 03-06-2026. Mod.2

1. Discutere il seguente argomento:

- data una hamiltoniana H si mostri che se $f(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ e $g(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ sono due costanti del moto che non dipendono esplicitamente dal tempo anche la loro parentesi di Poisson $\{f, g\}$ è costante (in che senso? È un nuovo integrale del moto?). Si faccia un esempio. [10 pt]

2. Risolvere i seguenti esercizi:

- data la hamiltoniana $H = \frac{p^2}{2} + q$ si trovino le soluzioni $q = q(t-t_0; q_0, p_0)$, $p = p(t-t_0; q_0, p_0)$ delle equazioni di Hamilton dove q_0, p_0 è la posizione del sistema nello spazio delle fasi all'istante $t = t_0$ (ossia $q(0; q_0, p_0) = q_0$ e $p(0; q_0, p_0) = p_0$). Si mostri che lo jacobiano delle trasformazione di coordinate $q_0, p_0 \rightarrow q, p$ ossia il determinante della matrice jacobiana

$$\hat{J}(t; q_0, p_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial q}{\partial q_0} & \frac{\partial q}{\partial p_0} \\ \frac{\partial p}{\partial q_0} & \frac{\partial p}{\partial p_0} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

è uguale a 1 per qualsiasi $t-t_0$. Si dica qual è la conseguenza per la conservazione dei volumi nello spazio delle fasi; [10 pt]

- si consideri la hamiltoniana $H = \frac{p^2}{2+q^4} + \frac{q^4}{2+q^4}$. Si dica per quali valori dell'energia si hanno moti periodici. Si trovi esplicitamente (a meno di una costante moltiplicativa) la variabile azione A in funzione di E e la frequenza Ω in funzione di A . [10 pt]