

Esonero di Meccanica Classica e Analitica del 16-09-2026. Mod.1

1. Discutere il seguente argomento:

- invarianza delle equazioni di Lagrange per l'aggiunta alla lagrangiana di una qualsiasi derivata totale $\frac{dF(\mathbf{q},t)}{dt}$. [10 pt]

2. Risolvere i seguenti esercizi:

- un punto materiale pesante di massa m è vincolato senza attrito alla superficie $z = x^2 + y^2$. Il punto, oltre alla forza peso $(0, 0, -mg)$ di potenziale mgz è soggetto ad una forza verticale $(0, 0, \alpha z)$ di potenziale $-\frac{\alpha}{2}z^2$. Si trovi la lagrangiana del sistema utilizzando le variabili polari ρ e θ e si trovi un secondo integrale del moto oltre all'energia meccanica; [10 pt]
- relativamente al problema precedente si riscriva il potenziale utilizzando le variabili cartesiane x e y , si determinino le posizioni di equilibrio al variare del parametro α e se ne discuta la stabilità sempre al variare del parametro α . [10 pt]

Esonero di Meccanica Classica e Analitica del 16-09-2026. Mod.2

1. Discutere il seguente argomento:

- le variabili azione-angolo per i moti kepleriani. [10 pt]

2. Risolvere i seguenti esercizi:

- data l'Hamiltoniana

$$H = (1 + p_1^2)(1 + p_2^2 + q_2^2)$$

individuare le costanti del moto. Trovare inoltre la soluzione $q_1(t), p_1(t), q_2(t), p_2(t)$ delle equazioni di Hamilton in funzione dei dati iniziali $q_1(0), p_1(0), q_2(0), p_2(0)$; [10 pt]

- si consideri la trasformazione $Q = q^3$, $P = \alpha p q^\beta$, dire per quali valori di α e β è completamente canonica. Si trovi l'hamiltoniana $H = H(q, p)$ associata alla lagrangiana $L = \frac{9q^4}{2}\dot{q}^2 - \frac{q^6}{2}$. Si determini inoltre l'hamiltoniana H' per le variabili completamente canoniche Q e P (quelle con i parametri α e β precedentemente determinati). [10 pt]