

Esame di Meccanica Classica e Analitica del 18-09-2025. Mod.1

1. Discutere il seguente argomento:

- Funzionale d'azione e condizione di stazionarietà: equazioni di Eulero-Lagrange. [10 pt]

2. Risolvere i seguenti esercizi:

- due punti materiali pesanti di uguale massa m siano vincolati senza attrito rispettivamente alle curve $y = 0$, $z = x^2 + 1$ e $y = 0$, $z = -x^2$ e siano inoltre connessi tra loro elasticamente da una molla di costante k . Si dimostri che la posizione $x_1 = x_2 = 0$ è di equilibrio e se ne discuta la stabilità al variare dei parametri; [13 pt]
- relativamente al problema precedente si assuma $k = 1$, $mg = 1$ e si scriva la lagrangiana ridotta delle piccole oscillazioni intorno alla posizione di equilibrio stabile. [7 pt]

Esame di Meccanica Classica e Analitica del 18-09-2025. Mod.2

1. Discutere il seguente argomento:

- Definizione di trasformazione canonica e completamente canonica. Invarianza delle parentesi di Poisson fondamentali come condizione necessaria e sufficiente per la completa canonicità di una trasformazione indipendente dal tempo (con dimostrazione). [10 pt]

2. Risolvere i seguenti esercizi:

- si data la Hamiltoniana $H = \frac{p^2}{2} + \frac{q^2-1}{4}$. Si dica per quali valori dell'energia il moto è periodico. Si determinino esplicitamente le variabili azione-angolo in funzione di q e p . Si determini la frequenza in funzione dell'azione. [10 pt]
- si trovi la trasformazione canonica generata dalla funzione di seconda specie $F_2(q, P, t) = P^{\alpha+\beta t} q^\gamma$ con $\alpha \neq 0$ e $\gamma \neq 0$ (si scrivano le variabili q, p in funzione delle Q, P e viceversa). Dire per quali valori di α, β e γ la trasformazione è completamente canonica e per quali oltre a essere completamente canonica è anche naturale. Si verifichi che la trasformazione completamente canonica (non necessariamente naturale) verifica la condizione di sufficienza e necessarietà basata sulle parentesi di Poisson. [10 pt]