

Esame di Meccanica Classica e Analitica del 25-06-2026. Mod.1

1. Discutere il seguente argomento:

- siano assegnate la matrice hessiana \hat{V} (definita positiva) e la matrice dell'energia cinetica \hat{T} : si scriva la lagrangiana ridotta delle piccole oscillazioni, si scrivano le equazioni di Lagrange e si dica come si trovano le relative soluzioni. [10 pt]

2. Risolvere i seguenti esercizi:

- si considerino due punti materiali pesanti di uguale massa m , il primo è vincolato alla retta di equazione $y = 0, z = x$ mentre il secondo è vincolato alla retta di equazione $y = 0, z = \alpha x$ con $\alpha \neq 1$ (i valori di α possono essere sia negativi che positivi). I due punti siano inoltre connessi da una molla di costante elastica k . Si scriva la lagrangiana utilizzando le variabili x_1 e x_2 , si determini la posizione di equilibrio e si discuta la sua stabilità; [10 pt]
- si consideri il sistema del precedente esercizio (mantenendo le stesse variabili e le relative derivate) e si dica per quale valore di α la lagrangiana si separa. Per questo valore di α , trovare quindi i due integrali del moto. [10 pt]

Esame di Meccanica Classica e Analitica del 25-06-2026. Mod.2

1. Discutere il seguente argomento:

- le variabili azione-angolo per sistemi con un grado di libertà come nuove variabili canoniche. Soluzioni delle relative equazioni di Hamiltoni. [10 pt]

2. Risolvere i seguenti esercizi:

- data l'hamiltoniana $H(q, p) = \frac{p^2}{2} + \frac{q^2 - 2q}{2}$ trovare le variabili azione-angolo (suggerimento: si tenga presente che $(q - 1)^2 = q^2 - 2q + 1$ e che il potenziale è definito a meno di una costante additiva). Esprimere l'energia in funzione dell'azione e quindi ottenere la relativa frequenza $\Omega(A)$; [12 pt]
- si trovino (con le parentesi di Poisson) i valori dei parametri α e β per i quali la trasformazione $Q = \alpha p + \ln(q)$, $P = qe^p - q + \beta qp$ è completamente canonica. Si determini poi la funzione generatrice di seconda specie $F_2(q, P)$ della trasformazione completamente canonica trovata (si tenga presente che $\int \ln(x) dx = x \ln(x) - x$). [8 pt]