

## Esame di Meccanica Classica e Analitica del 26-06-2023. Mod.1

1. Discutere il seguente argomento:

- invarianza delle equazioni di Lagrange per l'aggiunta alla lagrangiana di una qualsiasi derivata totale  $\frac{d}{dt}F(\mathbf{q}, t)$ . [10 pt]

2. Risolvere i seguenti esercizi:

- un punto materiale pesante di massa  $m$  sia vincolato senza attrito alla superficie  $z = -\sin(x^2 + y^2)$  e sia collegato da una molla di costante  $k$  all'origine. Si scriva la lagrangiana utilizzando le variabili  $x$  e  $y$ . Si mostri che la posizione  $(0, 0)$  è di equilibrio e se ne discuta la stabilità al variare dei parametri. Si assuma  $mg = k/4$  e dopo aver verificato la positività della matrice hessiana si scriva la lagrangiana ridotta delle piccole oscillazioni intorno alla posizione  $(0, 0)$ . Si determini la soluzione delle relative equazioni di Lagrange; [12 pt]
- relativamente al problema precedente si riscriva la lagrangiana utilizzando le variabili polari  $\rho$  e  $\theta$ . Si scrivano le equazioni di Lagrange. Si trovi un secondo integrale del moto (oltre all'energia meccanica) e se ne discuta il significato fisico. [8 pt]

## Esame di Meccanica Classica e Analitica. Mod.2 & Meccanica Razionale del 26-06-2023

1. Discutere il seguente argomento:

- derivazione delle equazioni di Hamilton dalle equazioni di Lagrange. [10 pt]

2. Risolvere i seguenti esercizi:

- si data la hamiltoniana  $H = (1 + \epsilon t) \frac{p^2}{2} + \frac{q^2}{2}$ , si determini la variabile azione in funzione dell'energia e del tempo e la frequenza in funzione del tempo. Si mostri che la frequenza rimane finita e staccata da zero in tutto l'intervallo  $t \in [0, \tau/\epsilon]$  comunque venga scelto  $\tau$  e si dica che conseguenze ha questo per la variabile azione; [12 pt]
- si trovi la trasformazione canonica generata dalla funzione di prima specie  $F_1(q, Q) = (1 + \alpha t^2) q^\beta Q^\gamma$  con  $\beta \neq 0$  e  $\gamma \neq 0$  (si esplicitino le variabili  $Q, P$  in funzione delle  $q, p$ ). Si dica per quali valori dei parametri la trasformazione è completamente canonica e lo si verifichi utilizzando le parentesi di Poisson. [8 pt]