

# 10

## I PRINCIPI VARIAZIONALI

Introduciamo l'argomento dei principi variazionali con una citazione dell'incipit del trattato<sup>[62]</sup> *Celestial Mechanics* di Carl Ludwig Siegel (1896–1981) e Jürgen Kurt Moser (1928–1999):

« *Ours, according to Leibniz, is the best of all possible worlds, and the laws of nature can therefore be described in terms of extremal principles.* »

Non intendiamo addentrarci in discussioni di carattere filosofico su questa visione che pone a fondamento della Meccanica un principio di minimo, secondo il quale il moto naturale ha comportamento in qualche senso ottimale, in contrasto con la visione Newtoniana di un Universo (la “quantità fluente”) la cui evoluzione è determinata dallo stato corrente tramite un'equazione differenziale (la “flussione”, che è nota). Al lettore decidere se preferisce accettare l'idea di Leibniz come interpretazione affascinante dei fenomeni naturali in termini di un principio metafisico generale oppure rigettarla come presuntuosa convinzione che il nostro pensiero sia il metro della perfezione dell'Universo.

Più modestamente vogliamo introdurre i principi variazionali come possibile strumento descrittivo dei fenomeni fisici, ed in particolare di quelli meccanici, che possiamo eventualmente cercare di estendere a situazioni più generali ampliandone in qualche modo il campo di applicazione.

Il calcolo delle variazioni nasce dalla generalizzazione del problema di calcolare i massimi e minimi, o più in generale i punti stazionari, di una funzione di variabile reale. Il primo passo consiste nel considerare funzioni di più variabili. La generalizzazione più impegnativa è il passaggio a funzioni i cui argomenti sono essi stessi delle funzioni — con espressione ingenua che si chiarirà meglio in seguito: funzioni di infinite variabili.

Storicamente il problema della ricerca di massimi e minimi fu dibattuto a lungo nel corso del secolo XVII, ed ebbe un ruolo di primo piano nello sviluppo dell'Analisi Matematica moderna. La prima esposizione sistematica è dovuta a Leibniz e fu pubblicata nel 1684 [45]. Alcuni anni prima Newton era già pervenuto indipendentemente a risultati analoghi, senza tuttavia pubblicarli.

Negli stessi anni, grazie ai nuovi metodi dell'analisi infinitesimale introdotti da

Newton e Leibniz, vennero risolti alcuni problemi di massimo e di minimo le cui soluzioni non sono assegnate da punti, ma da curve. Nel 1696 Johann Bernoulli, in una lettera agli *Acta Eruditorum* propose ai matematici d'Europa il cosiddetto problema della *brachistocrona*, che descriveremo nel paragrafo 10.1.4. La soluzione fu trovata da Newton, Jakob Bernoulli e Leibniz.<sup>1</sup>

La disputa sul problema della Brachistocrona viene considerata come l'atto di nascita del *Calcolo delle variazioni*, cioè della disciplina matematica che si occupa di determinare i punti di stazionarietà, includendo anche i massimi ed i minimi, di funzioni che hanno per argomento altre funzioni (o "curve" rappresentate da queste funzioni).

## 10.1 Alcuni problemi di massimo e minimo

I primi problemi che illustriamo riguardano la propagazione della luce. Il fenomeno della riflessione sembra indicare, a prima vista, che un raggio luminoso si riflette in modo da minimizzare il percorso. Ciò però, come vedremo tra poco, dipende dalla forma dello specchio: il cammino può anche essere il più lungo, o più semplicemente stazionario, in un senso da precisare. Se invece si esamina il fenomeno della rifrazione si conclude che la luce minimizza (o rende stazionario) non il cammino, ma il *tempo* necessario per propagarsi tra due punti; questa osservazione sta alla base del principio di Fermat. Nel tentativo di trovare un principio universale che si applichi sia alla Meccanica che all'Ottica Maupertuis introdusse il principio di minimizzazione dell'Azione. La minimizzazione del tempo entra in modo determinante anche nel problema della brachistocrona, mentre nei problemi isoperimetrici si cerca ancora la minimizzazione di altre quantità, ad esempio l'area racchiusa da una curva.

### 10.1.1 La riflessione della luce

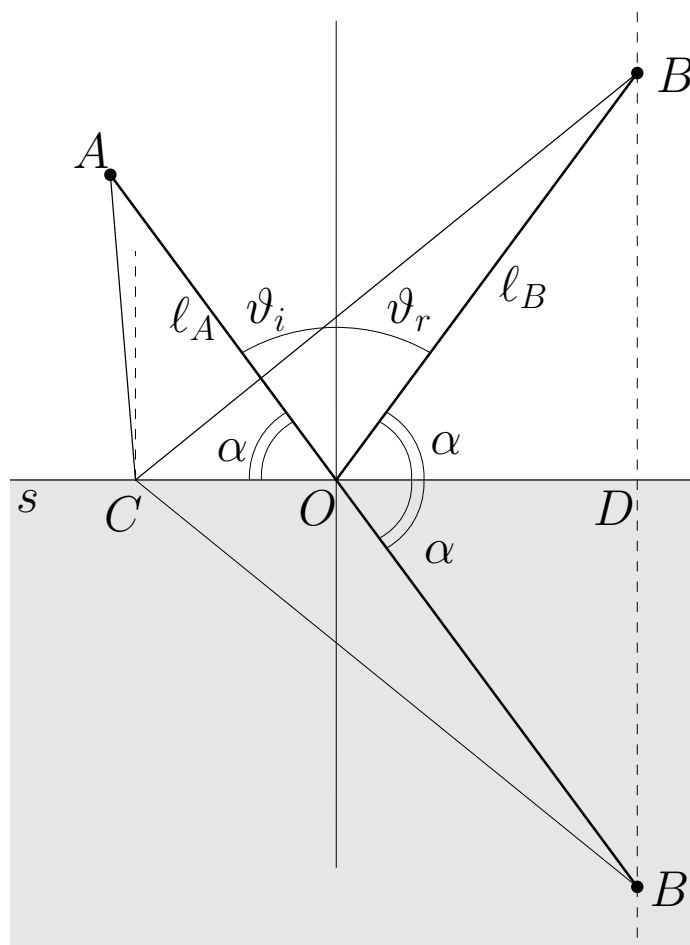
Una delle prime esperienze di ottica consiste nell'inviare un raggio luminoso a riflettersi su uno specchio. Sperimentalmente si verifica che vale la *legge della riflessione della luce*:

*Il raggio incidente, la normale al piano di incidenza ed il raggio riflesso sono complanari, e gli angoli di incidenza e di riflessione sono eguali.*

Qui per angolo di incidenza e di riflessione si intendono gli angoli che il raggio incidente e riflesso formano con la normale al piano di incidenza.

---

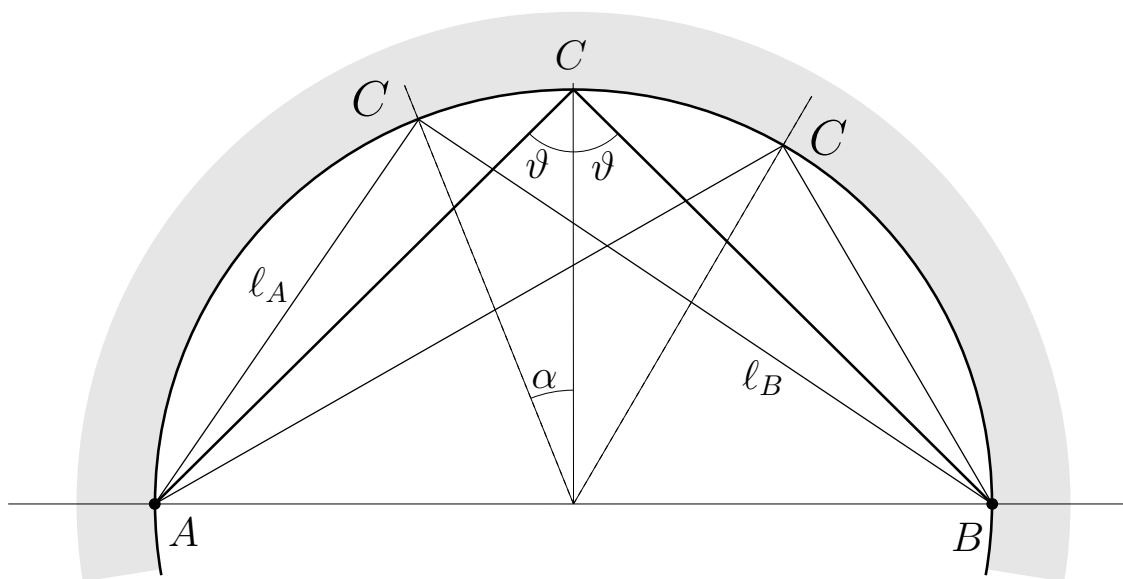
<sup>1</sup> La vicenda presenta aspetti curiosi. Johann Bernoulli, che conosceva la soluzione del problema ma ne aveva dato una dimostrazione errata, lo propose probabilmente con l'intento di mettere in difficoltà il fratello e rivale Jakob. Newton, venuto a conoscenza del problema, lo risolse in una giornata e ne inviò la soluzione all'amico Charles Montague, presidente della Royal Society, senza pubblicarla. Fu la stessa Royal Society a provvedere alla pubblicazione in forma anonima nei *Philosophical Transactions of the Royal Society* del gennaio 1697. Nel maggio dello stesso anno vennero pubblicate negli *Acta Eruditorum* le soluzioni di Leibniz, Johann Bernoulli e Jakob Bernoulli, seguite da una versione latina di quella di Newton.



**Figura 10.1.** Ad illustrazione della legge della riflessione su una superficie piana. Il cammino più breve da  $A$  a  $B$  è quello che rende eguali gli angoli di incidenza  $\vartheta_i$  e di riflessione  $\vartheta_r$ .

Consideriamo anzitutto uno specchio piano. Vogliamo mostrare che il cammino seguito dal raggio luminoso è quello che *minimizza il percorso che congiunge i punti  $A$  e  $B$  mediante una riflessione*.

Schematizziamo l'esperienza come in figura 10.1, dove lo specchio piano è rappresentato dalla retta  $s$ . Vogliamo che il raggio luminoso partito da  $A$  raggiunga il punto  $B$ . Costruiamo il punto  $B'$  simmetrico a  $B$  rispetto alla retta  $s$  abbassando la perpendicolare a  $s$  da  $B$  e imponendo che le lunghezze dei segmenti  $BD$  e  $DB'$  siano eguali. Tracciando la retta per i punti  $AB'$  si determina il punto  $O$  di intersezione tra le rette  $AB'$  ed  $s$ . Sia  $C$  un punto qualsiasi di  $s$ . Il triangolo  $BCB'$  è palesemente isoscele perché la retta  $s$  è l'asse del segmento  $BB'$ , quindi i segmenti  $CB$  e  $CB'$  sono eguali, ed i cammini  $ACB$  e  $ACB'$  hanno la stessa lunghezza. Ciò vale in particolare per il punto  $O$ , sicché i cammini  $AB'$  e  $AOB$  hanno la stessa lunghezza. Se  $C$  non coincide con  $O$  allora, per la disequaglianza triangolare, la somma dei segmenti  $AC$  e  $CB'$  è maggiore del segmento  $AB'$ ; quindi, per le eguaglianze appena stabilite, il



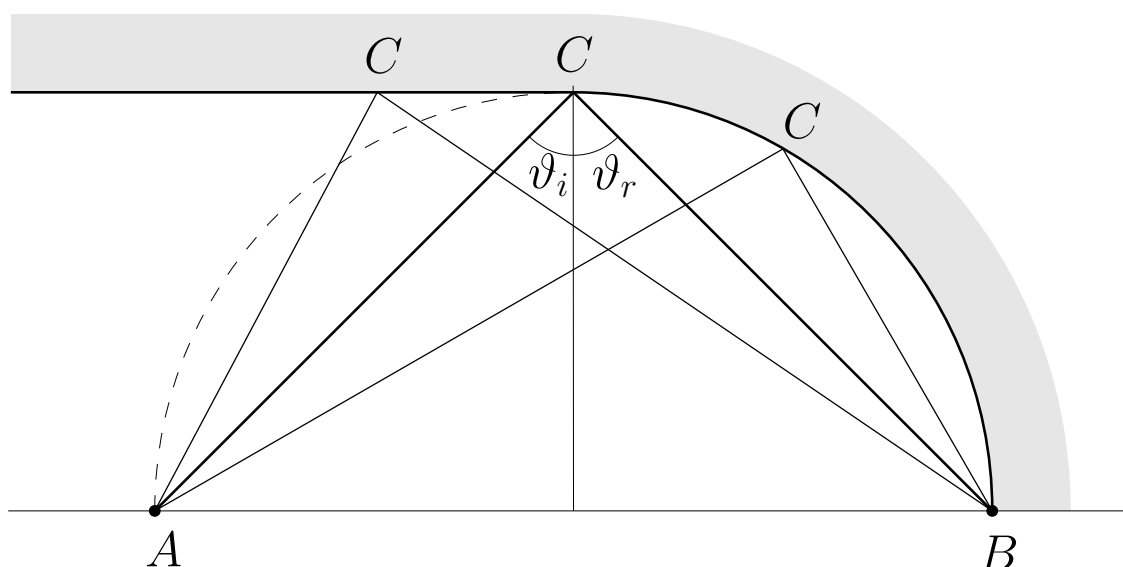
**Figura 10.2.** Un raggio che si propaga tra i due estremi del diametro di una circonferenza segue il percorso più lungo.

cammino  $ACB$  ha lunghezza maggiore del cammino  $AOB$ . Ne segue che il cammino  $AOB$  è il più breve tra quelli considerati. Mostriamo ora che il cammino  $AOB$  soddisfa la legge di riflessione della luce, ossia che l'angolo di incidenza  $\vartheta_i$  e l'angolo di riflessione  $\vartheta_r$  sono eguali. Poiché il triangolo  $OBB'$  è isoscele, gli angoli  $\alpha'$ ,  $\alpha''$  sono eguali, e d'altra parte anche gli angoli  $\alpha$  e  $\alpha'$  sono eguali, perché opposti al vertice. Gli angoli  $\vartheta_i$  e  $\vartheta_r$  sono complementari rispettivamente ad  $\alpha$  e  $\alpha'$ , e dunque sono eguali essendo complementari ad angoli eguali. Quindi per la legge della riflessione il raggio luminoso segue il cammino  $AOB$ , che è anche il più breve tra quelli riflessi.

L'esempio che abbiamo portato indurrebbe a concludere che nel fenomeno della riflessione la luce sceglie sempre il cammino più breve. Questa conclusione si rivela però affrettata: vediamo un secondo esempio. Supponiamo che la luce si propaghi all'interno di un semicerchio, come in figura 10.2, avendo come sorgente e punto di arrivo i due estremi  $A$  e  $B$  del diametro. Si verifica facilmente che in tal caso il percorso è massimo. Infatti se identifichiamo il punto di incidenza della luce con l'angolo  $\alpha$  in figura calcoliamo facilmente (misurando l'angolo in senso antiorario e ponendo eguale all'unità il raggio) che  $\ell_A = 2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)$  e  $\ell_B = 2 \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right)$ , sicché il percorso avrebbe lunghezza  $s(\alpha) = 2\sqrt{2} \cos \frac{\alpha}{2}$ . Questa funzione ha evidentemente un massimo per  $\alpha = 0$ . D'altra parte con un semplice argomento geometrico si vede che il solo percorso che soddisfi la legge di riflessione della luce è quello per cui il raggio incide nel punto  $C$  in figura, che corrisponde ad  $\alpha = 0$ , ossia al massimo della lunghezza.

**Esercizio 10.1:** Siano  $A, B$  due punti distinti di una circonferenza. Determinare i possibili cammini di un raggio luminoso che si propaga da  $A$  a  $B$  riflettendosi sulla circonferenza stessa.

Possiamo immaginare un terzo esempio considerando uno specchio che (nella sua



**Figura 10.3.** Se lo specchio è la combinazione di un tratto piano con un quadrante di circonferenza, allora il cammino percorso dalla luce non è né un massimo né un minimo, ma corrisponde ad un valore stazionario della lunghezza.

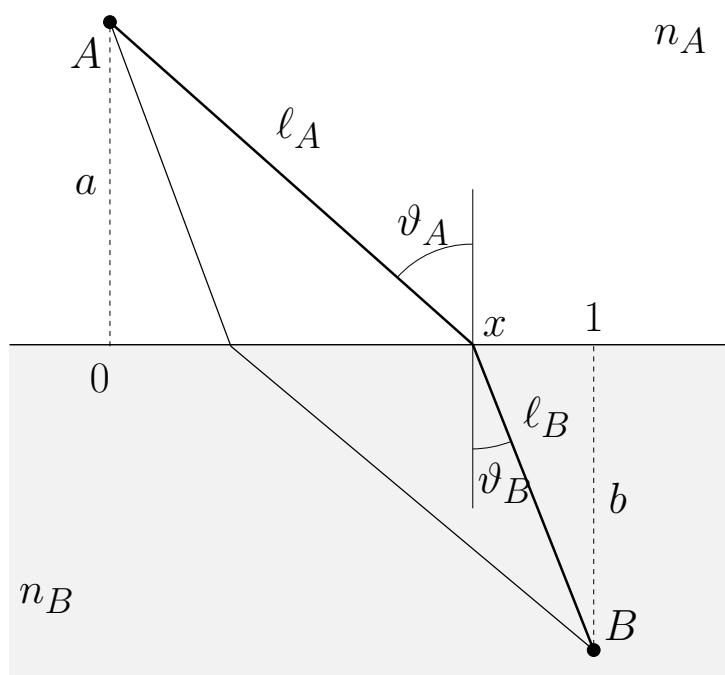
rappresentazione piana) è costituito da un tratto rettilineo adiacente ad un arco che è un quadrante di circonferenza, come in figura 10.3, e scegliendo i punti  $A$ ,  $B$  come in figura. In tal caso il cammino percorso dalla luce, secondo la legge della riflessione è  $ACB$ , che è minore di ogni cammino  $AC'B$  con  $C'$  sul tratto rettilineo dello specchio, ma è maggiore di ogni cammino  $AC''B$  con  $C''$  sull'arco di circonferenza. Se però rappresentiamo la lunghezza del cammino in funzione di una coordinata opportuna, ad esempio la coordinata  $x$  che corre sul diametro  $AB$ , allora ci rendiamo conto subito che il punto  $C$  corrisponde ad un *punto stazionario* della funzione.

Possiamo dunque enunciare il principio che *nel fenomeno della riflessione la luce segue il percorso che ha lunghezza stazionaria rispetto a quelli vicini*.

### 10.1.2 La legge di Snell per la rifrazione della luce e il principio di Fermat

È noto dall'ottica che quando un raggio di luce attraversa la superficie di separazione tra due mezzi (ad esempio aria ed acqua, o aria e vetro) subisce una deflessione. L'esperienza più comune è quella del bastone parzialmente immerso nell'acqua, che appare come spezzato. Sperimentalmente si verifica che il comportamento ottico di un materiale trasparente si caratterizza in modo coerente mediante una costante  $n$ , detta *indice di rifrazione*, e che la deflessione di un raggio che passa da un materiale ad un altro segue la *legge della rifrazione della luce* o *legge di Snell*:<sup>2</sup>

<sup>2</sup> La legge viene attribuita a Willebrord Snel van Royen (1580–1626) che la comunicò nel 1621. Apparentemente era stata scoperta fin dal 1602 da Thomas Harriot (1560–1621), che però non la pubblicò. La latinizzazione Snellius del nome dello scopritore ha dato probabilmente origine alla forma Snell ormai comunemente usata.



**Figura 10.4.** Ad illustrazione del fenomeno della rifrazione: la luce passa da un mezzo  $A$  con indice di rifrazione  $n_A$  a un mezzo  $B$  con indice di rifrazione  $n_B$ , e viene deflessa secondo la legge di Snell.

*Il raggio incidente, la normale al piano di incidenza ed il raggio rifratto sono complanari, e i seni degli angoli di incidenza e di rifrazione sono inversamente proporzionali agli indici di rifrazione.*

Facendo riferimento alla figura 10.4 la legge di Snell può quindi tradursi nella formula

$$(10.1) \quad \frac{\sin \vartheta_A}{\sin \vartheta_B} = \frac{n_B}{n_A}$$

Si vede immediatamente che il percorso seguito dalla luce non è quello di lunghezza minima. Fu Pierre de Fermat (1601–1665) ad enunciare il principio che *la luce minimizza il tempo di percorrenza*.<sup>3</sup> Si assume che l'indice di rifrazione sia inversamente proporzionale alla velocità di propagazione della luce nel mezzo, o più precisamente che rappresenti il rapporto tra la velocità di propagazione della luce nel vuoto, che denotiamo con  $c$ , e quella del mezzo considerato, che denotiamo con  $v$ . Si ha così la relazione  $v = c/n$ . Se si considerano due mezzi  $A$  e  $B$  si ha  $n_A v_A = n_B v_B = c$ , dove  $n_A$ ,  $n_B$  sono gli indici di rifrazione e  $v_A$ ,  $v_B$  sono le velocità di propagazione della luce nei due mezzi.

Nel caso che stiamo esaminando si osserva che il tempo necessario per percorrere un tratto di lunghezza  $\ell$  in un mezzo omogeneo è  $t = \ell/v$ , essendo  $v$  la velocità. Suppo-

<sup>3</sup> Il principio che la luce minimizzi il tempo viene enunciato in una lettera di Fermat del 1657, indirizzata a Marin Cureau de la Chambre (1594–1669). La deduzione della legge della rifrazione è riportata in una lettera del 1664, di cui non si conosce il destinatario.

niamo che la luce si propaghi dal punto  $A = (0, a)$  al punto  $B = (0, -b)$  attraversando lo strato di separazione tra due mezzi omogenei in un punto di coordinata  $x$ , come illustrato in figura 10.4. Allora valgono le relazioni  $v_A t_A = \ell_A$  e  $v_B t_B = \ell_B$ , ed il tempo necessario perché il raggio luminoso si propaghi da  $A$  a  $B$  risulta essere

$$\tau(x) = \frac{\ell_A}{v_A} + \frac{\ell_B}{v_B} = \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{v_A} + \frac{\sqrt{(1-x)^2 + b^2}}{v_B}.$$

Derivando si calcola

$$\frac{d\tau}{dx} = \frac{x}{\ell_A v_A} - \frac{1-x}{\ell_B v_B} = \frac{\sin \vartheta_A}{v_A} - \frac{\sin \vartheta_B}{v_B},$$

che si annulla quando gli angoli soddisfano la relazione

$$(10.2) \quad \frac{\sin \vartheta_A}{\sin \vartheta_B} = \frac{v_A}{v_B}$$

Si vede così che la legge di Snell viene interpretata come manifestazione del fatto che la luce minimizza il tempo di percorrenza, e non il percorso.

Il principio di Fermat può enunciarsi in modo più generale se si considera un mezzo non omogeneo. In tal caso si introduce una funzione  $n(\mathbf{x})$  che rappresenta l'indice di rifrazione nel punto  $\mathbf{x}$  della regione occupata dal mezzo<sup>4</sup> (che possiamo ben descrivere come una regione connessa in  $\mathbb{R}^3$ ). Ciò significa che la velocità della luce nel punto  $\mathbf{x}$  è proporzionale a  $1/n(\mathbf{x})$ . Supponiamo ora che la luce si propaghi da  $A$  a  $B$  seguendo un cammino  $\gamma$ . Allora, denotando con  $d\ell$  la lunghezza di un tratto infinitesimo della curva avremo che quel tratto verrà percorso in un tempo  $dt$  tale che  $v(\mathbf{x})dt = d\ell$ , ovvero  $c dt = n(\mathbf{x})d\ell$ , e la curva  $\gamma$  verrà interamente percorsa in un tempo  $\tau(\gamma)$  dato dalla formula

$$(10.3) \quad c\tau(\gamma) = \int_{\gamma} n(\mathbf{x})d\ell.$$

La quantità  $c\tau(\gamma)$  viene detta *cammino ottico*, e rappresenta la distanza che verrebbe percorsa dalla luce nel vuoto nel tempo  $\tau(\gamma)$ . Il principio di Fermat afferma che

*Il cammino percorso dalla luce tra due punti fissati è quello che rende stazionario il cammino ottico.*

Ciò equivale a dire che viene reso stazionario il tempo.

Se si rilegge la formula (10.3) si vede come il principio di Fermat ponga un problema matematico non banale: trovare il minimo (o almeno un punto di stazionarietà) di una quantità che dipende da una curva. Vediamo anzitutto come si possa concretamente calcolare il cammino ottico. A tal fine occorre parametrizzare la curva  $\gamma$ . Questo lo conosciamo dalla geometria: rappresentiamo la curva come una funzione regolare  $\mathbf{x}(s)$  su un intervallo  $[s_0, s_1]$  in modo che valgano le condizioni agli estremi  $\mathbf{x}(s_0) = A$

---

<sup>4</sup> Qui stiamo considerando il caso in cui il mezzo sia anche isotropo, ossia la velocità di propagazione della luce in un determinato punto non dipende dalla direzione.

e  $\mathbf{x}(s_1) = B$ . In tal modo possiamo scrivere l'elemento di lunghezza  $d\ell$  nel punto  $\mathbf{x}(s)$  come

$$d\ell = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2} ds ,$$

sicché il cammino ottico si scrive in forma più esplicita

$$c\tau(\gamma) = \int_{s_0}^{s_1} n(\mathbf{x}(s)) \sqrt{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2} ds .$$

Abbiamo dunque una funzione che assegna un valore reale ad una curva, o, se si preferisce, ad una funzione: si parla comunemente di *funzionale*. Ci proponiamo di dare un significato all'operazione di "determinare un punto estremale di un funzionale". Il problema del calcolo delle variazioni nella sua forma più immediata si pone qui.

Rimandiamo la discussione di questo problema matematico al paragrafo 10.2, premettendo la discussione di alcuni altri esempi che conducono ancora allo studio di funzionali. Il lettore impaziente potrà interrompere la lettura di questo paragrafo, e passare immediatamente al successivo.

### 10.1.3 Il principio di Maupertuis

In una memoria dal titolo significativo "*Accord de différentes loix de la nature qui avoient jusqu'ici paru incompatibles*", presentata il 15 aprile 1744 all'Académie des Sciences di Parigi, Pierre Louis Moreau de Maupertuis (1698–1759) si occupa della relazione tra il movimento dei corpi materiali e della propagazione dei raggi luminosi. Egli pone l'accento su tre fenomeni:

- (i) il moto rettilineo di un corpo non soggetto a forze (la particella libera, nel linguaggio odierno) confrontato con la propagazione in linea retta dei raggi luminosi;
- (ii) il moto di un corpo che urtando contro una parete rimbalza in modo perfettamente elastico confrontato con la legge della riflessione della luce;
- (iii) il moto di un corpo che si muove attraverso mezzi di densità diversa confrontato con la legge di rifrazione della luce.

Ciò che Maupertuis considera inaccettabile è la constatazione che mentre per i primi due fenomeni si trova corrispondenza perfetta, in quanto luce e corpi materiali seguono sempre il cammino più breve, nel terzo caso la descrizione del moto di un corpo diventa problema alquanto complesso, mentre per la luce si deve modificare il punto di vista, affermando che il raggio luminoso minimizza il tempo, e non il percorso. È ben vero che nel caso della propagazione rettilinea e della riflessione della luce la minimizzazione del tempo è tutt'uno con quella del percorso, ma, si chiede l'autore, perché si dovrebbe preferire il tempo allo spazio?

Qui Maupertuis segue un percorso puramente speculativo, con l'obiettivo dichiarato di individuare una quantità che misuri l'*Azione* della Natura, e di assoggettare quella quantità ad un principio di minimo. A tal fine egli prende in considerazione lo spazio e la velocità, e postula che l'azione debba essere proporzionale



ad entrambi. Dunque, nel caso di un corpo o di un raggio luminoso che percorra uno spazio  $\ell$  con velocità costante  $v$  egli definisce l'azione come  $S = v\ell$ .

La verifica che da questo unico principio seguano le tre leggi dell'ottica prese in considerazione sopra è facile. Vediamola nel caso della rifrazione, riferendoci ancora alla figura 10.2. Abbiamo

$$S = v_A \ell_A + v_B \ell_B = v_A \sqrt{a^2 + x^2} + v_B \sqrt{b^2 + (1-x)^2} .$$

Annullandone la derivata abbiamo

$$\frac{dS}{dx} = \frac{xv_A}{\ell_A} - \frac{(1-x)v_B}{\ell_B} = v_A \sin \vartheta_A - v_B \sin \vartheta_B .$$

Ne risulta la legge

$$\frac{\sin \vartheta_A}{\sin \vartheta_B} = \frac{v_B}{v_A} .$$

Il confronto con la (10.2), dedotta dal principio di Fermat, mostra che si ha un accordo con la legge di Snell solo se si assume che *la velocità dei propagazione della luce in un mezzo sia proporzionale all'indice di rifrazione*, in contrasto con la proporzionalità inversa assunta da Fermat. Per inciso, l'ipotesi che la velocità della luce in un mezzo sia proporzionale all'indice di rifrazione era stata avanzata anche da Cartesio, col quale Maupertuis si trova in accordo.

L'estensione al caso della Meccanica viene trattata in una lunga nota successiva<sup>[50]</sup>. Qui Maupertuis definisce l'azione come proporzionale alla massa  $m$ , alla velocità  $v$  ed allo spazio percorso  $\ell$ , ossia come  $S = mv\ell$ , ed enuncia il principio nella forma seguente:<sup>5</sup>

« *Lors qu'il arrive quelque changement dans la Nature, la Quantité d'Action, nécessaire pour ce changement, est la plus petite qu'il soit possible.* »

Ad illustrazione del principio egli tratta tre fenomeni: l'urto completamente anelastico tra due corpi, l'urto completamente elastico e l'equilibrio della leva.<sup>6</sup> Vediamone

<sup>5</sup> Quando avviene qualche cambiamento nella natura la Quantità d'Azione necessaria per quel cambiamento è la minima possibile.

<sup>6</sup> Gli esempi, come si vede, sono pochi e trattabili in modo elementare. Ciò non è privo di giustificazione. Nel paragrafo introduttivo della memoria Maupertuis sottolinea che l'applicazione del principio ad un caso di notevole importanza come il moto centrale è stata discussa da Eulero nel volume [19], apparso dopo la comunicazione della prima memoria che abbiamo illustrato in queste pagine, e che proprio la lettura di quel testo gli ha suggerito che si potesse "*tirer de la même source des vérités d'un genre supérieur & plus important*" (ricavare dalla stessa sorgente delle verità di carattere superiore e più importante). In effetti nella sua seconda memoria Maupertuis pone l'accento non tanto sulle possibili applicazioni, quanto sull'importanza dell'aver scoperto un *principio metafisico* che egli pone a fondamento della dimostrazione dell'esistenza di Dio: "*Qu'il faut chercher les preuves de l'existence de Dieu, dans les Loix generales de la Nature. Que les Loix selon lesquelles les Mouvement se conserve, se distribue & se détruit, sont fondées sur les attributes d'une suprême Intelligence*". (Che si devono cercare le prove dell'esistenza di Dio nelle Leggi generali della Natura. Che le Leggi secondo le quali

l'applicazione, seguendo l'esposizione di Maupertuis.

Un problema comune a tutti gli esempi è il calcolo dell'azione per un corpo in moto uniforme su una retta la cui velocità cambia istantaneamente da  $v$  a  $w$ . La variazione dell'azione viene valutata da Maupertuis come  $\Delta S = (v - w)^2$ , e questa è la quantità che entra nel calcolo del minimo.<sup>7</sup>

Il primo esempio è l'urto completamente anelastico: *due corpi di massa  $m_1$  e  $m_2$  in moto uniforme su una stessa retta con velocità  $v_1$  e  $v_2$  entrano in collisione e si ricombinano in un unico corpo; si chiede di determinare la velocità  $w$  di quest'ultimo dopo l'urto.* Calcolando l'azione necessaria per modificare la velocità di ambedue i corpi si ha

$$S = m_1(v_1 - w)^2 + m_2(v_2 - w)^2,$$

che è la quantità da minimizzare rispetto a  $w$ . Calcolando il differenziale dell'azione si ha

$$dS = [-2m_1(v_1 - w) - 2m_2(v_2 - w)] dw$$

che si annulla per

$$(m_1 + m_2)w = m_1v_1 + m_2v_2.$$

Questo dà la velocità  $w$  cercata. La stessa legge si ottiene dalla conservazione della quantità di moto totale.<sup>8</sup>

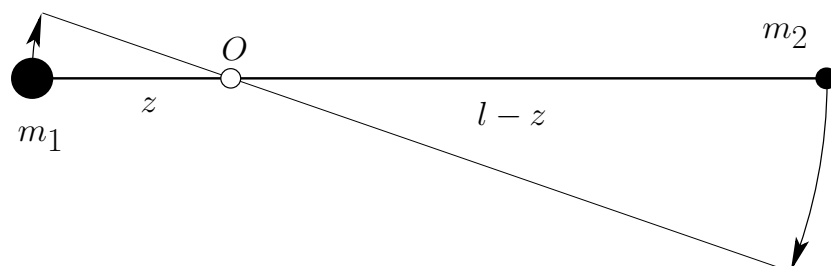
Il secondo esempio è l'urto completamente elastico: *due corpi di massa  $m_1$  e  $m_2$  in moto uniforme su una stessa retta con velocità  $v_1$  e  $v_2$  entrano in collisione e rimbalzano in modo che la velocità relativa sia la stessa prima e dopo l'urto;*<sup>9</sup> si chiede

il movimento si mantiene, si distribuisce o si distrugge sono fondate sugli attributi di un'Intelligenza suprema.) In questa luce non ci si meraviglia della scelta di pochi esempi caratterizzanti proprio la conservazione e lo scambio di movimento negli urti e la distruzione del movimento nell'equilibrio, e neppure del fatto che la loro discussione occupi solo un quarto della memoria, mentre il resto è dedicato a considerazioni di carattere metafisico.

<sup>7</sup> Qui Maupertuis ricorre ad un ragionamento piuttosto complesso, che può riassumersi come segue. Supponendo che il corpo percorra uno spazio  $\ell$  a velocità  $v$  e poi uno stesso spazio a velocità  $w$  verrebbe spontaneo porre  $S = v\ell + w\ell = (v - w)\ell + 2w\ell$ . Il valore di questa espressione dipende palesemente dallo stato di quiete o di moto dell'osservatore, e quindi non fornisce un risultato univoco. Dovendosi minimizzare l'Azione compiuta dalla Natura per modificare la velocità si deve invece considerare la *differenza* tra l'azione compiuta nel primo tratto, a velocità  $v$ , con quella corrispondente al secondo tratto, a velocità  $w$ , avendo posto eguale la lunghezza  $\ell$  dei due tratti; in tal modo si ottiene una quantità indipendente dall'osservatore, perché dipende solo dalla velocità relativa  $v - w$ . Inoltre la lunghezza  $\ell$ , essendo arbitraria, può scegliersi come lo spazio percorso nell'unità di tempo a velocità  $v - w$ , e questo dà la quantità  $\Delta S$ .

<sup>8</sup> Le forze agenti al momento dell'urto devono considerarsi *interne* al sistema, e quindi, per le equazioni cardinali, non cambiano la quantità di moto.

<sup>9</sup> Questa condizione viene spiegata da Maupertuis assumendo che i corpi, a causa appunto della loro elasticità, si deformino durante l'urto, ma che gli effetti della deformazione vengano completamente annullati perché i corpi riprendono la loro forma primitiva,



**Figura 10.5.** La ricerca dell'equilibrio di una leva.

di determinare le velocità  $w_1$  e  $w_2$  dopo l'urto. L'azione si calcola come

$$S = m_1(v_1 - w_1)^2 + m_2(v_2 - w_2)^2$$

e si deve minimizzare sotto la condizione di urto elastico, ossia  $v_1 - v_2 = w_2 - w_1$ . A tal fine si calcola il differenziale dell'azione

$$dS = -2m_1(v_1 - w_1)dw_1 - 2m_2(v_2 - w_2)dw_2$$

e vi si sostituisce la condizione di urto elastico, ossia

$$w_2 = w_1 + v_1 - v_2, \quad dw_2 = dw_1.$$

Imponendo  $dS = 0$  si ha così

$$m_2(-w_1 + 2v_2 - v_1) + m_1(v_1 - w_1) = 0,$$

e si ricava

$$w_1 = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2v_2}{m_1 + m_2}, \quad w_2 = \frac{2m_1v_1 + (m_1 - m_2)v_2}{m_1 + m_2}.$$

Con un semplice calcolo si verifica che la stessa legge segue dalla conservazione della quantità di moto e dell'energia cinetica.

Il terzo esempio è l'equilibrio della leva: *Si abbia una leva di lunghezza  $\ell$  ai cui estremi sono fissate due masse  $m_1$  e  $m_2$ ; si chiede quale sia la posizione del fulcro che realizza l'equilibrio.* Riferendoci alla figura 10.5 supponiamo che  $z$  e  $\ell - z$  siano rispettivamente i bracci, ossia le distanze del fulcro  $O$  dagli estremi con masse rispettivamente  $m_1$  e  $m_2$ . Il problema è determinare  $z$  in modo che la leva sia in equilibrio.

Se si imprime una piccola rotazione alla leva gli estremi si muovono con velocità proporzionali ai rispettivi bracci, e percorrono archi anch'essi proporzionali ai bracci. Quindi l'azione da minimizzare è proporzionale a

$$S = m_1z^2 + m_2(\ell - z)^2.$$

---

senza altri effetti. Di conseguenza la velocità relativa deve essere la stessa, a parte un cambiamento di segno la cui necessità risulta evidente se si assume che uno dei due corpi abbia massa infinita, nel qual caso si ha una riflessione elastica. Da qui la relazione  $v_1 - v_2 = w_2 - w_1$ .

Il minimo si ha per

$$m_1 z = m_2 (\ell - z) ,$$

che è la nota legge della leva secondo la quale si devono equilibrare i momenti della forze.

#### 10.1.4 Il problema della Brachistocrona

\*\*\* da scrivere \*\*\*

#### 10.1.5 Il problema della Tautocrona

\*\*\* da scrivere \*\*\*

## 10.2 Il principio di minima azione di Hamilton

Il principio di minima azione è quello che presenta maggior interesse per la Meccanica, e per questo esponiamo il metodo generale di calcolo dei punti stazionari di un funzionale facendo riferimento proprio a questo caso.

Consideriamo lo spazio delle configurazioni di un sistema meccanico conservativo, che per quanto abbiamo visto nel capitolo 6 possiamo identificare con una varietà differenziabile dotata di coordinate  $q_1, \dots, q_n$ , e poniamo il problema seguente: *Siano  $A = (q_1^{(0)}, \dots, q_n^{(0)})$  e  $B = (q_1^{(1)}, \dots, q_n^{(1)})$  due punti della varietà.<sup>10</sup> Ci chiediamo quale sia il moto naturale<sup>11</sup> da  $A$  a  $B$ .*

Per meglio comprendere il problema occorre una breve riflessione. Fin qui, seguendo lo sviluppo della teoria Newtoniana, abbiamo considerato il movimento sotto l'aspetto *locale*: assegnate le forze che agiscono sul sistema si conoscono le derivate seconde delle coordinate, e si afferma che i movimenti possibili sono soluzioni delle equazioni di moto, siano esse scritte in forma newtoniana, lagrangiana o hamiltoniana. In questo procedimento è essenziale considerare lo spazio degli stati o delle fasi, introducendo accanto alle posizioni anche le velocità o, equivalentemente, i momenti, che sono anch'essi incognite. Qui prendiamo in considerazione il solo spazio delle configurazioni, e tra le infinite curve che conducono da un punto  $A$  ad un punto  $B$  vogliamo selezionare quella che viene percorsa dal sistema sotto l'azione delle forze, ossia quella naturale. Il *principio di minima azione* o *principio di Hamilton* afferma che

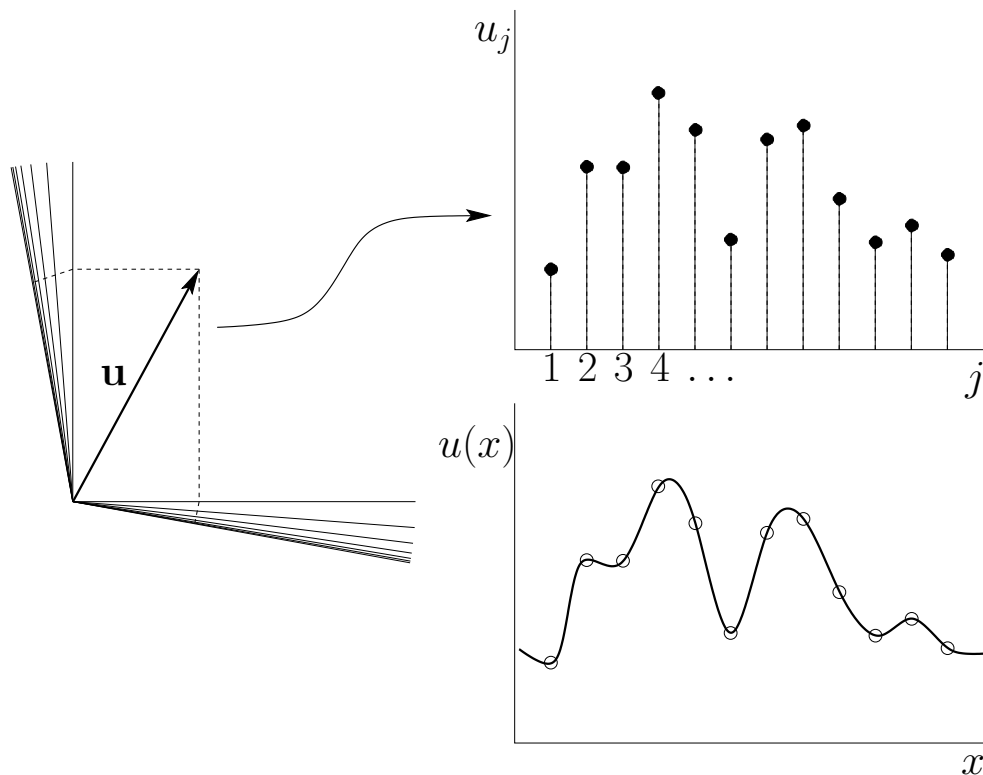
*Per un sistema conservativo descritto dalla Lagrangiana  $L(q, \dot{q}, t)$  i moti naturali sono le curve  $\gamma$  che rendono stazionario il funzionale di azione hamiltoniana*

$$(10.4) \quad S(\gamma) = \int_{\gamma} L(q, \dot{q}, t) dt .$$

---

<sup>10</sup> Qui supponiamo che i due punti cadano all'interno di una stessa carta della varietà, il che equivale formalmente a considerare un aperto di  $\mathbb{R}^n$ . Ciò non pregiudica la generalità.

<sup>11</sup> Intendiamo con *moto naturale* il movimento che si svolge sotto l'azione delle forze che agiscono sul sistema



**Figura 10.6.** Una rappresentazione ingenua del passaggio da un vettore in  $\mathbb{R}^n$  ad una funzione. Le componenti di un vettore  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$  possono essere rappresentate agevolmente in grafico ponendo in ascissa un indice discreto  $j$ . Sostituendo l'indice discreto  $j$  con la variabile continua  $x$  si passa alla rappresentazione in grafico di una funzione.

### 10.2.1 Il calcolo dei punti stazionari di un funzionale

Vediamo anzitutto come il concetto di funzionale possa vedersi, sia pure in modo che appare ingenuo, come la generalizzazione del concetto di funzione di più variabili.

È osservazione comune che mentre ci è facile rappresentare un vettore su un piano — cosa che facciamo solitamente ricorrendo ad una freccia — o immaginare un vettore nello spazio tridimensionale pur con la difficoltà tecnica di rappresentarla su un foglio, ci troveremmo in seria difficoltà se cercassimo di rappresentare vettori in dimensione superiore a tre. Ma, a ben pensarci, un modo per rappresentare un tal vettore esiste — anche se ingenuo e non del tutto comodo: è quello illustrato dalla figura 10.6. Assegnata una base, tracciamo un grafico in cui riportiamo in ascissa l'indice ed in ordinata la componente del vettore. Ora, sempre in modo ingenuo, pensiamo all'indice come una quantità continua, che possiamo ben indicare con  $x$ , e ad ogni  $x$  facciamo corrispondere un valore che riportiamo in ordinata: è quello che facciamo ogni volta che rappresentiamo una funzione. Questo passaggio — ce ne rendiamo conto col tempo e con lo studio — introduce immediatamente un concetto nuovo: la continuità (ovvero la formalizzazione del fatto ingenuo di poter tracciare il grafico senza alzare la penna).

A questo seguono poi tutti i concetti e le proprietà che costituiscono argomento dei corsi di Analisi Matematica.

Quando pensiamo ad una funzione  $f(x_1, \dots, x_n)$  di  $n$  variabili reali possiamo immaginare un procedimento per cui alla  $n$ -upla di indici  $1, \dots, n$  si associa una  $n$ -upla di numeri reali  $x_1, \dots, x_n$ , e a questa un numero reale  $f(x_1, \dots, x_n)$ : questo è il procedimento che seguiamo quando specifichiamo la forma di una funzione facendo uso delle coordinate. Per i funzionali si segue lo stesso procedimento: si considera un intervallo continuo  $[t_0, t_1]$  (che sostituisce la  $n$ -upla di indici) e ad ogni valore  $t \in [t_0, t_1]$  si associa un vettore  $x_1(t), \dots, x_n(t)$ , ovvero una funzione vettoriale  $\mathbf{x}(t)$  imponendo le proprietà che ci interessano (continuità, differenziabilità, &c). A questa funzione diamo il nome di curva e la identifichiamo con un simbolo  $\gamma$ , ed alla curva associamo un numero reale che possiamo indicare con  $F(\gamma)$ . Con questo procedimento abbiamo costruito un *funzionale*. Ad esempio, se  $\mathbf{x} = (x, y, z)$  è un vettore in  $\mathbb{R}^3$  allora le funzioni regolari  $x(t), y(t), z(t)$  per  $t_0 \leq t \leq t_1$  rappresentano una curva  $\gamma$ , e il funzionale

$$F(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt$$

ne rappresenta la lunghezza.<sup>12</sup>

Vediamo ora come si possa estendere ai funzionali il concetto di differenziale che conosciamo per una funzione.

Un modo naturale fa riferimento al concetto di *derivata direzionale*. Richiamiamolo nel caso di una funzione  $f(\mathbf{x})$ . Fissato  $\mathbf{x}$  si considera un incremento che indichiamo con  $\delta\mathbf{x}$  anch'esso fissato, e si introduce una nuova funzione  $\tilde{f}(\alpha)$  definita come

$$\tilde{f}(\alpha) = f(\mathbf{x} + \alpha \delta\mathbf{x}) ,$$

ossia il valore che la funzione  $f$  assume nel punto  $\alpha \delta\mathbf{x}$ . Qui ci basta considerare  $f$  definita in un aperto, ed assumere che  $|\alpha|$  sia abbastanza piccolo perché  $\mathbf{x} + \alpha \delta\mathbf{x}$  resti ancora dentro lo stesso aperto. Possiamo allora definire la variazione  $\Delta f$  di  $f(\mathbf{x})$  in corrispondenza all'incremento  $\delta\mathbf{x}$  riconducendoci al caso di una sola variabile, ossia come

$$\Delta f = \left. \frac{d}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} \tilde{f}(\alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x} + \alpha \delta\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})}{\alpha} .$$

Al variare dello spostamento  $\delta\mathbf{x}$  possiamo calcolare l'incremento  $\Delta f$  in qualunque direzione.

---

<sup>12</sup> Talvolta si usa la notazione  $F[\mathbf{x}(t)]$  per indicare il funzionale. L'uso della parentesi quadra per delimitare l'argomento sta ad indicare che non si deve pensare ad una funzione composta, nel senso che  $F$  dipende da  $t$  tramite  $\mathbf{x}$ , ma ad una "funzione della funzione  $\mathbf{x}(t)$ ", ossia della curva. Correndo il rischio della pedanteria sottolineiamo che nel caso di funzione composta  $f(\mathbf{x}(t))$  ad un valore assegnato di  $t$  corrisponde un punto  $\mathbf{x}$  e quindi il valore della funzione  $f$  nel punto  $\mathbf{x}$ , sicché  $f$  risulta essere di fatto una funzione di  $t$ . Nel caso del funzionale  $F[\mathbf{x}(t)]$  invece all'intervallo  $[t_0, t_1]$  corrisponde una curva  $\mathbf{x}(t)$ , ed a questa il valore  $F$  assegnato alla curva.

Nel caso del funzionale occorre qualche precauzione nel definire l'insieme delle curve che si considerano e gli spostamenti corrispondenti. Per fissare le idee possiamo pensare alla lunghezza della curva, ma l'argomento è generale. La scelta più semplice è la seguente. Fissati i due punti  $A$  e  $B$  in un aperto opportuno consideriamo l'insieme di tutte le curve  $\gamma$  descritte mediante funzioni  $\mathbf{x}(t)$  con  $t_0 \leq t \leq t_1$  che hanno i punti  $A$  e  $B$  come estremi; in una formula, consideriamo l'insieme

$$\mathcal{U} = \{\mathbf{x}(t) : t_0 \leq t \leq t_1, \mathbf{x}(t_0) = A, \mathbf{x}(t_1) = B\} .$$

Consideriamo poi lo spostamento  $\delta\mathbf{x}(t)$  come una curva che si annulli agli estremi, ossia  $\delta\mathbf{x}(t_0) = \delta\mathbf{x}(t_1) = 0$ ; denotiamo questo spostamento col simbolo  $\delta\gamma$ , e col simbolo  $\gamma + \alpha \delta\gamma$  la curva  $\mathbf{x}(t) + \alpha \delta\mathbf{x}(t)$ . In tal modo se la curva  $\gamma$  descritta dalla funzione  $\mathbf{x}(t)$  soddisfa  $\gamma \in \mathcal{U}$  allora, supponendo che  $\alpha$  sia abbastanza piccolo, anche la curva  $\gamma + \alpha \delta\gamma$  soddisfa alla stessa condizione. Se ora fissiamo sia la curva  $\gamma$  che lo spostamento  $\delta\gamma$  potremo pensare al funzionale  $F(\gamma + \alpha \delta\gamma)$  come funzione della sola variabile reale  $\alpha$ , e ne potremo calcolare la *variazione*  $\delta F$  in corrispondenza all'incremento  $\delta\gamma$  come

$$\delta F = \left. \frac{d}{d\alpha} F(\gamma + \alpha \delta\gamma) \right|_{\alpha=0} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{F(\gamma + \alpha \delta\gamma) - F(\gamma)}{\alpha} .$$

Come si vede, la definizione ricalca perfettamente quella di differenziale per funzioni di più variabili: la variazione del funzionale corrisponde alla parte principale dell'incremento della funzione.

Cercare un punto di stazionarietà del funzionale diventa ora questione del tutto analoga alla ricerca di un punto stazionario di una funzione: si vuole che la parte principale dell'incremento (o della variazione) si annulli per qualunque incremento  $\delta\gamma$ , ossia che si abbia  $\delta F = 0$ .

### 10.2.2 La stazionarietà dell'azione hamiltoniana

Veniamo ora all'azione hamiltoniana. La validità del principio di Hamilton per la Meccanica è espressa dal seguente

**Teorema 10.1:** *Gli estremali dell'azione hamiltoniana sono tutti e soli i movimenti soddisfacenti le equazioni di Lagrange.*

Prima di passare alla dimostrazione del teorema conviene precisare qualche elemento tecnico, ricordando come abbiamo introdotto il problema all'inizio del paragrafo. Consideriamo dunque l'insieme di curve differenziabili  $q(t) = (q_1(t), \dots, q_n(t))$  che congiungono due punti dello spazio delle configurazioni, ossia

$$(10.5) \quad \mathcal{U} = \{q(t) : t_0 \leq t \leq t_1, q(t_0) = A, q(t_1) = B\} .$$

Consideriamo poi delle variazioni differenziabili  $\delta q(t) = (\delta q_1(t), \dots, \delta q_n(t))$  che si annullano agli estremi, ossia  $\delta q(t_0) = \delta q(t_1) = 0$ . Assegnata una curva  $\gamma$  avremo la curva variata  $\gamma + \alpha \delta\gamma$  descritta dalle funzioni  $q(t) + \alpha \delta q(t)$ . Per calcolare il funzionale d'azione dobbiamo però far uso anche delle derivate temporali. Osservando che

$$\frac{d}{dt}(q(t) + \alpha \delta q(t)) = \dot{q}(t) + \alpha \frac{d}{dt} \delta q(t)$$

denoteremo<sup>13</sup>  $\frac{d}{dt}\delta q(t) = \delta\dot{q}$ .

Ci serviremo poi del

**Lemma 10.2:** Sia  $f(t)$  una funzione continua sull'intervallo  $[t_0, t_1]$ , e supponiamo che si abbia

$$\int_{t_0}^{t_1} f(t)\eta(t) dt = 0$$

per ogni funzione continua  $\eta(t)$  soddisfacente  $\eta(t_0) = \eta(t_1) = 0$ . Allora  $f(t)$  è identicamente nulla sull'intervallo  $[t_0, t_1]$ .

**Dimostrazione.** Per contraddizione, supponiamo che esista un punto  $\tau \in [t_0, t_1]$  con  $f(\tau) \neq 0$ ; per fissare le idee assumiamo che sia  $f(\tau) > 0$ . Allora, per la continuità di  $f(t)$ , esiste un intervallo  $[\tau_0, \tau_1] \subset [t_0, t_1]$  in cui  $f(t)$  non si annulla, e quindi ha sempre segno positivo. Prendiamo allora una funzione continua  $\eta(t)$  che sia positiva all'interno dell'intervallo  $(\tau_0, \tau_1)$  e sia identicamente nulla all'esterno<sup>14</sup>. Allora si ha

$$\int_{t_0}^{t_1} f(t)\eta(t) dt = \int_{\tau_0}^{\tau_1} f(t)\eta(t) dt > 0,$$

perché la funzione integranda  $f(t)\eta(t)$  è palesemente positiva sull'intervallo  $[\tau_0, \tau_1]$  e nulla altrove. Questo contraddice l'ipotesi che l'integrale sia nullo, e dunque  $f(t)$  deve annullarsi identicamente. Q.E.D.

Veniamo ora alla

**Dimostrazione del teorema 10.1.** Omettendo l'indicazione della dipendenza temporale per semplificare la scrittura calcoliamo la variazione  $\delta S$  del funzionale come

$$\begin{aligned} \delta S &= \left. \frac{d}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} \int_{t_0}^{t_1} L(q + \alpha \delta q, \dot{q} + \alpha \delta \dot{q}, t) dt \\ &= \sum_{j=1}^n \int_{t_0}^{t_1} \left( \frac{\partial L}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j \right) dt. \end{aligned}$$

Integrando per parti il secondo addendo in parentesi abbiamo

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j dt = \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \right|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j dt.$$

<sup>13</sup> O, se si preferisce, la relazione scritta può interpretarsi come affermazione che la derivata della variazione  $\delta q(t)$  è la variazione  $\delta\dot{q}$  della derivata, ma ciò non ha grande importanza per il seguito.

<sup>14</sup> Ad esempio possiamo prendere la funzione

$$\eta(t) = \begin{cases} (t - \tau_0)^3 (\tau_1 - t)^3 & \text{per } \tau_0 < t < \tau_1, \\ 0 & \text{per } t_0 \leq t \leq \tau_0 \text{ e } \tau_1 \leq t \leq t_1. \end{cases}$$



Il termine finito si annulla perché  $\delta q_j(t_0) = \delta q_j(t_1) = 0$ , e dunque la condizione di annullamento della variazione si scrive

$$\delta S = \sum_{j=1}^n \int_{t_0}^{t_1} \left( \frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta q_j dt = 0 .$$

Se la curva  $q(t)$  soddisfa le equazioni di Lagrange allora l'integrale si annulla, ed è quindi nulla la variazione del funzionale. Mostriamo che vale anche il viceversa. Anzitutto, per l'arbitrarietà di  $\delta q(t)$  possiamo sempre scegliere tutte le funzioni  $\delta q_j(t)$  identicamente nulle ad eccezione di una, e quindi l'equazione precedente diventa

$$\int_{t_0}^{t_1} \left( \frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta q_j dt = 0 \quad \text{per } j = 1, \dots, n .$$

Poiché questo deve essere vero per ogni variazione  $\delta q_j(t)$  differenziabile (e dunque continua, essendo funzione di una sola variabile) possiamo applicare il lemma 10.2, e concludiamo che deve essere

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = 0 , \quad j = 1, \dots, n ,$$

ossia che la curva  $q(t)$  deve soddisfare le equazioni di Lagrange.

*Q.E.D.*

