

# PROBABILITÀ E STATISTICA

Per capire qual'è **l'altezza media degli italiani** è stato intervistato **un campione di 1523 cittadini**. La media campionaria dell'altezza risulta essere:

$$\bar{x} = 172,3 \text{ cm}$$

**Possiamo affermare che questa è l'altezza media degli italiani?**

In caso negativo,

**Quanto possiamo aspettarci come scostamento dal valore 172,3 cm?**

Per essere in grado di giungere a conclusioni valide su una popolazione a partire da un campione, bisogna sapere quale è la probabilità che certi eventi si verifichino. In altre parole

**Per prevedere o trarre conclusioni (inferire) serve la probabilità.**

# COS'È LA PROBABILITÀ?

## Definizione classica

La probabilità di un evento è il rapporto tra il numero dei casi favorevoli all'evento e il numero dei casi possibili, purché questi ultimi siano tutti equiprobabili (Bernoulli e Laplace).

Ad esempio: quale è la probabilità che lanciando un dado esca un numero pari? I casi favorevoli sono 3 (esce il 2 o il 4 o il 6), i casi possibili sono 6. Quindi:

$$p = \frac{3}{6} = 0,5$$

**Ma c'è un evidente tautologia in questa definizione!**

**E se gli eventi elementari non sono equiprobabili (dado truccato)?**

## Definizione frequentista

La probabilità di un evento è il limite cui tende la frequenza relativa dell'evento al crescere del numero degli esperimenti (Richard von Mises).

Ad esempio: quale è la probabilità che lanciando un dado esca un numero pari? Si conta il numero di volte  $N_f$  in cui esce un numero pari su  $N$  lanci e si fa crescere  $N$ :

$$p = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N_f}{N}$$

**Questo limite non potrà mai essere realizzato in pratica!**

**E se l'esperimento non è ripetibile? (con che probabilità le temperature medie si alzeranno di un grado nei prossimi 20 anni?)**

## Definizione soggettiva

La probabilità di un evento è il prezzo che un individuo (ragionevole!) ritiene equo pagare per ricevere 1 se l'evento si verifica e ricevere 0 se l'evento non si verifica (Bruno de Finetti e Leonard Jimmie Savage).

Questa definizione si applica anche al caso in cui gli eventi elementari (casi possibili) non sono equiprobabili e al caso in cui l'esperimento non è ripetibile (quale è la probabilità che l'Aquila Rugby vinca la Top ten?).

**Che succede se due individui hanno opinioni differenti ossia diversa propensione al rischio?**

**Queste diatribe sono state superate dall'impostazione assiomatica introdotta da Andrey Nikolaevich Kolmogorov nel 1933. L'impostazione assiomatica non è una definizione operativa (non fornisce indicazioni su come calcolare la probabilità) ma costruisce la teoria della probabilità partendo da semplici assiomi comuni a tutte le definizioni.**

## ESPERIMENTI ALEATORI. SPAZIO CAMPIONE

Facciamo un passo indietro per fissare alcuni concetti.

**Un esperimento aleatorio è un qualunque procedimento che produce un'osservazione detta esito non noto a priori.**

NOTA: il termine **aleatorio** deriva dal latino **alea** che significa dado. È sinonimo di **casuale**.

**Definizione.** L'insieme di tutti gli esiti possibili di un esperimento aleatorio si chiama **spazio campione**. Lo indicheremo con **S**.

**Lancio del dado. Esperimento:** vedere quale faccia esce. **Spazio campione**  $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ .

**Durata di una lampadina. Esperimento:** accendere una lampadina e cronometrare il tempo necessario affinché si fulmini. **Spazio campione**  $S = \{ \text{tutti i numeri reali non negativi} \}$ .

- I possibili esiti di un esperimento aleatorio sono detti **eventi elementari** e sono gli elementi  $s \in S$
- I sottoinsiemi di  $S$  si chiamano **eventi**, li indicheremo con  $A, B, \dots$   $A \subset S$ . Indicheremo con  $\{s\} \subset S$  l'evento costituito dall'unico elemento  $s$ .
- Se  $S$  è **finito o infinito numerabile** allora è detto **spazio campione discreto**, se è **infinito non numerabile** è detto **spazio campione continuo**.

**Nota:** numerabile significa che i suoi elementi si possono contare. Sono numerabili gli insiemi che si possono mettere in corrispondenza biunivoca con i **naturali**  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$  o con gli **interi**  $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ .

**Non confondete finito con limitato!** Ad esempio l'intervallo  $[2, 30]$  è limitato ma infinito (e non numerabile).

## Esempio del lotto

Gli eventi elementari sono tutti i numeri interi da 1 a 90.

$$S = \{1, 2, 3, \dots, 89, 90\}$$

**Esempio di evento elementare:** “viene estratto il 5”

$$= \{5\} \subset S. \quad 5 \in S.$$

**Esempio di evento non elementare:** “viene estratto un numero compreso fra 87 e 90”

$$A = \{87, 88, 89, 90\}, \quad A \subset S$$

$S$  è un insieme finito, quindi è uno spazio campione discreto.

## Esempio della durata della lampadina

Gli eventi elementari sono tutti i numeri reali maggiori o uguali a 0.

$$S = [0, +\infty) = \mathbb{R}_+$$

**Esempio di evento elementare:** “la lampadina dura esattamente 10 ore e mezza”  $= \{10.5\} \subset S$ . **10.5**  $\in$  **S**.

**Esempio di evento non elementare:** “la lampadina dura almeno 10 ore”  $= [10, +\infty)$ . **[10, +∞)**  $\subset$   **$\mathbb{R}_+$** .

**S e' un insieme non numerabile** (non si riesce a numerare tutti i numeri reali...), quindi è uno **spazio campione continuo**.

**Nota:** gli esempi di spazi continui che incontreremo sono  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{R}_+$  e in generale gli intervalli reali come  $[\sqrt{2}, 6.8]$ ,  $(-\infty, 1)$ , ecc.



## VERIFICARSI DI EVENTI

Sia  $A \subset S$  un evento. Facciamo l'esperimento ed il risultato è un evento elementare  $s \in S$ :

se  $s \in A$  diciamo che **si è verificato l'evento  $A$**

se  $s \notin A$  diciamo che **non si è verificato l'evento  $A$**

NOTA. Se  $s \notin A$  allora  $s \in A^c$  dove  $A^c =$  **complementare di  $A$**  (a volte indicato con  $\bar{A}$ ), quindi in questo caso si è verificato  $A^c$ .

**Esempio.** Dado:  $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ .  $A =$  “esce un numero pari”  $= \{2, 4, 6\}$ . Lancio il dado esce 5. Non si è verificato  $A$  ma si è verificato  $A^c = \{1, 3, 5\}$ .

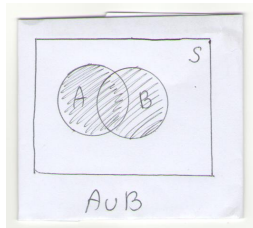
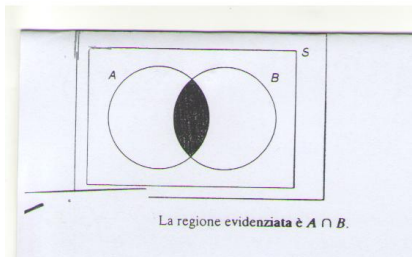
**$S$  è l'evento certo:** qualsiasi sia il risultato dell'esperimento esso sta in  $S$ .

**$\emptyset$  è l'evento impossibile:** qualsiasi sia il risultato dell'esperimento esso non sta in  $\emptyset$ .  **$\emptyset$  è l'insieme vuoto**, non contiene nessun elemento.

## EVENTI ED OPERAZIONI TRA INSIEMI

**Unione  $A \cup B$**  è l'evento “**si verifica A oppure** (non esclusivo) **B**”

**Intersezione  $A \cap B$**  è l'evento “**si verificano sia A che B**”



**Esempio. Lancio un dado.**

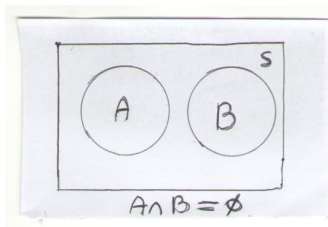
**A** = “esce un numero pari” =  $\{2, 4, 6\}$

**B** = “esce un numero minore di 5” =  $\{1, 2, 3, 4\}$

Esce 4: si **è verificato sia  $A \cup B$**  =  $\{1, 2, 3, 4, 6\}$  **che**

**$A \cap B$**  =  $\{2, 4\}$ .

Due eventi si dicono **disgiunti** o incompatibili se la loro intersezione è  $\emptyset$  = **l'insieme vuoto**. Gli eventi  $A$  e  $B$  non possono verificarsi contemporaneamente.



**Esempio. Lancio del dado.** I seguenti eventi

$A$  = “esce un numero pari” =  $\{2, 4, 6\}$

$B$  = “esce un numero dispari” =  $\{1, 3, 5\}$

sono disgiunti:  $A \cap B = \emptyset$ .

Osserva che in questo esempio  $A \cup B = S$ , cioè l'unione di  $A$  e  $B$  è l'evento certo.

## DEFINIZIONE ASSIOMATICA DI PROBABILITÀ

**Nota:** gli **assiomi** in matematica sono (poche) asserzioni che si assumono vere (non si devono dimostrare!). Dagli assiomi si fa discendere con deduzioni logiche tutta la teoria.

Supponiamo che lo spazio campione  $S$  sia finito (dirò dopo come si tratta il caso generale).

**Definizione.** Si chiama **probabilità** una funzione che **ad ogni evento**  $A \subset S$  **associa un numero reale**  $P(A)$  che rispetti le seguenti richieste:

(1)  $P(A) \in [0, 1]$

(2)  $P(S) = 1$

(3) (**additività**). Se  $A$  e  $B$  sono eventi disgiunti, allora

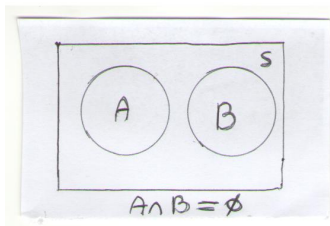
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \quad \text{se } A \cap B = \emptyset$$

Il numero  $P(A)$  è la **probabilità che si verifichi l'evento  $A$** , cioè che l'esito dell'esperimento sia un elemento dell'insieme  $A$ .

(1) afferma che la **probabilità** dell'evento  $A$  è un **numero compreso tra 0 e 1**.

(2)  $P(S) = 1$  afferma che **l'evento certo si verifica con probabilità 1** (massima).

(3)  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$  afferma che se gli eventi  $A$  e  $B$  non possono verificarsi contemporaneamente, allora **la probabilità che l'esito dell'esperimento sia in  $A$  o in  $B$  è uguale alla somma delle probabilità**.



## Esempio.

Paola non ha ancora deciso cosa farà domani sera. Potrebbe stare in casa oppure uscire, nel qual caso o andrebbe in palestra o al cinema.

Sappiamo che la **probabilità** che vada in **palestra è 0.3** e quella che vada al **cinema 0.2** (e supponiamo che la palestra e il cinema si escludano a vicenda).

### Qual è la probabilità che domani Paola esca?

Chiamiamo  $A$  l'evento "Paola domani sera esce",

$A_1$  = "Paola domani sera va in palestra"

$A_2$  = "Paola domani sera va al cinema"

Allora  $A = A_1 \cup A_2$ ,  $A_1 \cap A_2 = \emptyset$

Quindi

$$P(A) = P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) = 0.3 + 0.2 = 0.5.$$

## Alcune proprietà e definizioni.

1.  $P(\emptyset) = 0$

2.  $P(A^c) = 1 - P(A)$

3. (regola dell'addizione)  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

4. Se  $A_1, A_2, \dots, A_n$  sono  $n$  **eventi disgiunti**, indicando con  $A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^n A_i$  si ha

$$P(A) = P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$$

5. (indipendenza)  $A$  e  $B$  sono indipendenti se

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

## Esercizio

Lo spazio campione è  $S = \{1, 2, 3, 4\}$ . Con  $\{i\}$  indichiamo l'insieme costituito dal solo elemento  $i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ . Si conoscono le seguenti probabilità:

$$P(\{1\}) = \frac{1}{12}, \quad P(\{2\}) = \frac{1}{3}, \quad P(\{3\}) = \frac{1}{4}$$

- **Calcolare  $P(\{4\})$ .**

Si ha che  $S = \{1\} \cup \{2\} \cup \{3\} \cup \{4\}$  e gli eventi sono disgiunti.

$$P(S) = P(\{1\}) + P(\{2\}) + P(\{3\}) + P(\{4\})$$

$$P(\{4\}) = P(S) - P(\{1\}) - P(\{2\}) - P(\{3\}) = 1 - \frac{1}{12} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{3}$$



Siano  $A = \{1, 3, 4\}$ ,  $B = \{1, 2, 4\}$  e  $C = \{3, 4\}$

- **Calcolare  $P(A)$ ,  $P(B)$  e  $P(C)$**

$A = \{1\} \cup \{3\} \cup \{4\}$  e gli eventi sono disgiunti, quindi

$$\mathbf{P(A)} = P(\{1\}) + P(\{3\}) + P(\{4\}) = \frac{1}{12} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{8}{12} = \mathbf{\frac{2}{3}}$$

(Lo studente calcoli anche  $P(B)$  e  $P(C)$ )

- **Calcolare  $P(A^c)$**

$S = A \cup A^c$  e gli eventi sono disgiunti quindi

$$1 = P(S) = P(A) + P(A^c), \quad \mathbf{P(A^c)} = 1 - P(A) = 1 - \frac{2}{3} = \mathbf{\frac{1}{3}}$$

- **Calcolare  $P(A \cup B)$ .**

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4\} = S$ , quindi  $P(A \cup B) = P(S) = 1$ .

- **Calcolare  $P(A \cap B)$ .**

$A \cap B = \{1, 4\} = \{1\} \cup \{4\}$  e l'unione è disgiunta, quindi

$$\mathbf{P(A \cap B)} = P(\{1\}) + P(\{4\}) = \frac{1}{12} + \frac{1}{3} = \mathbf{\frac{5}{12}}$$

- **Calcolare  $P(A \cap C)$ .**

$A \cap C = C$  quindi  $\mathbf{P(A \cap C) = P(C)}$ .

## ESPERIMENTI CON ESITI EQUIPROBABILI

In molti casi è naturale assumere che ciascun esito dello spazio campionario  $S$  abbia la stessa probabilità di verificarsi.

In generale se  **$S$  è costituito da  $N$  esiti**, cioè  $S = \{1, 2, \dots, N\}$ ,  $|S| = N$ , allora chiameremo **probabilità uniforme** quella che assegna la stessa probabilità a tutti gli eventi elementari. In formule:

$$P(\{i\}) = \frac{1}{|S|} = \frac{1}{N} \quad i = 1, 2, \dots, N$$

**Esempio. Lancio del dado con probabilità uniforme.** Sia  **$A$**  l'evento **“esce un numero pari”**  $= \{2, 4, 6\}$ .

$A = \{2\} \cup \{4\} \cup \{6\}$  e gli eventi sono disgiunti, quindi (punto 4 del teorema)

$$P(A) = P(\{2\}) + P(\{4\}) + P(\{6\}) = 3 \frac{1}{6} = \frac{|A|}{|S|}$$

Quanto trovato nell'esempio è vero in generale. Sia  **$S$  uno spazio campione finito**  $|S| = N$  e con **probabilità uniforme**, allora per ogni evento  $A \subset S$  si ha

$$P(A) = \frac{|A|}{|S|}$$

Questa è la **definizione classica di probabilità** data da **Bernoulli e Laplace** nota come

$$P(A) = \frac{\text{numero dei casi favorevoli}}{\text{numero dei casi possibili}}$$

.

Si ricordi che i casi favorevoli sono gli eventi elementari contenuti in  $A$ .

## Esercizio.

Una scuola elementare offre 2 corsi opzionali di lingua straniera: uno di francese ed uno di inglese. Questi corsi sono aperti a tutti i **120** studenti delle ultime classi della scuola. Sappiamo che:

- **32** studenti seguono il corso di **francese**
- **36** studenti seguono il corso di **inglese**
- **8** studenti seguono **entrambi i corsi**

**Uno studente viene scelto a caso: quale è la probabilità che frequenti almeno un corso di lingue?**

Modo di dire: **“scegliere a caso” = con probabilità uniforme.**

**A** = {studenti che seguono il corso di **francese**}

**B** = {studenti che seguono il corso di **inglese**}

**Si richiede di calcolare  $P(A \cup B)$ .**

**120 studenti** dei quali **32 seguono francese**, **36 seguono inglese**, **8 entrambi**.

$A = \{\text{studenti che seguono il corso di francese}\},$

$B = \{\text{studenti che seguono il corso di inglese}\}.$

Sappiamo che

$$|A| = 32, \quad |B| = 36, \quad |A \cap B| = 8$$

Quindi

$$P(A) = \frac{32}{120}, \quad P(B) = \frac{36}{120}, \quad P(A \cap B) = \frac{8}{120}$$

Usando la **regola dell'addizione**

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

otteniamo

$$P(A \cup B) = \frac{32}{120} + \frac{36}{120} - \frac{8}{120} = \frac{60}{120} = \frac{1}{2}$$