# Introduzione alla Ricerca Operativa

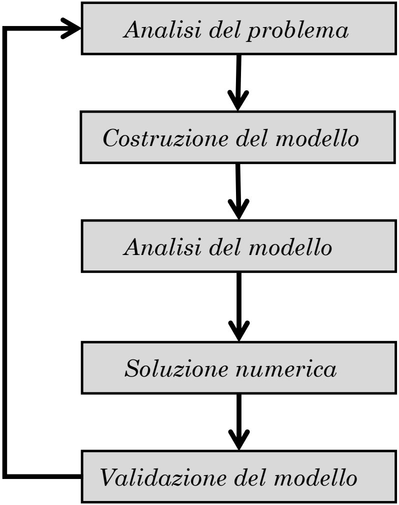
- Cos'è la Ricerca Operativa?
- Modellazione di problemi decisionali
- Fasi di uno studio di RO
- Applicazioni della RO

# Cos'è la Ricerca Operativa?

La Ricerca Operativa è la disciplina che concerne l'utilizzo del metodo scientifico nei processi decisionali

- Analisi e modellazione dei sistemi, allo scopo di prevederne l'evoluzione e/o di individuare le scelte ottimali rispetto agli obiettivi desiderati.
- Intrinsecamente interdisciplinare: Matematica Applicata /Informatica/ Ingegneria /Economia
- Gli strumenti della RO: modelli matematici, statistici e simulativi trattati attraverso tecniche sia analitiche che numeriche.

# Fasi di uno studio di RO



# Il problema del pasticciere - NEWTON, febbraio 2004

Un pasticciere produce 2 tipi di uova, EXTRA e SUPER utilizzando cacao, nocciole e latte

| | Cacao | Nocciole | Latte |
|---|---|---|---|
| EXTRA | 1 Kg/uovo | 1 Kg/uovo | 2 Kg/uovo |
| SUPER | 3 Kg/uovo | 1 Kg/uovo | 1 Kg/uovo |

Il pasticciere ha a disposizione:

- 36 Kg. di cacao
- 16 Kg. di nocciole
- 28 Kg. di latte

mentre dalla vendita ricava:

- 40 EUR/uovo EXTRA
- 60 EUR/uovo SUPER

Problema: massimizzare il ricavo totale dalla vendita

# Analisi del problema

- Analisi della struttura: problema singolo decisore (il pasticciere),
- Individuazione dei legami logici e funzionali: vincoli sulle risorse
- Individuazione degli obiettivi: massimizzare il ricavo (singolo criterio)

# Costruzione del modello

| | Cacao | Nocciole | Latte | |
|---|---|---|---|---|
| EXTRA | 1 Kg/uovo | 1 Kg/uovo | 2 Kg/uovo | 40 EUR/uovo |
| SUPER | 3 Kg/uovo | 1 Kg/uovo | 1 Kg/uovo | 40 EUR/uovo |
| | 36 Kg | 16 Kg | 28 Kg | |

1. scelta delle variabili decisionali: $x_E, x_S$ quantità di uova da preparare risp. di tipo EXTRA E SUPER
2. definizione della funzione obiettivo: max ricavo

$$\max 40x_E + 60x_S$$

3. descrizione delle scelte possibili (vincoli): disponibilità delle risorse

| | |
|---|---|
| cacao | $1x_E + 3x_S \leq 36$ |
| nocciole | $1x_E + 1x_S \leq 16$ |
| latte | $2x_E + 1x_S \leq 28$ |

# Ipotesi

- Proporzionalità Il contributo di una variabile alla f.o. e ai vincoli è proporzionale secondo una costante moltiplicativa alla quantità rappresentata dalla variabile stessa ( ad es. per produrre $1$ uovo di tipo SUPER, servono $3$ Kg di cacao indipendentemente dalla quantità di uova.)
- Additività Il contributo delle variabili alla f. o. e ai vincoli è dato dalla somma dei contributi di ogni singola variabile (per produrre $x_E$ uova di tipo EXTRA e $x_S$ uova di tipo SUPER, servono $x_E + 3x_S$ Kg di cacao)
- Frazionarietà Non abbiamo imposto che le variabili siano intere:  possibile che la soluzione del problema ci chieda di produrre quantità frazionarie di uova.

# Analisi del modello

$$
\begin{aligned}
\max 40x_E + 60x_S & \\
1x_E + 3x_S &\leq 36 \\
1x_E + 1x_S &\leq 16 \\
2x_E + 1x_S &\leq 28 \\
x_E, x_S &\geq 0
\end{aligned}
$$

- esistenza ed unicità delle soluzioni
- caratterizzazione analitica delle soluzioni ottime
- stabilità delle soluzioni rispetto a variazioni dei parametri del modello
- relazioni con altri problemi noti

# Soluzione numerica

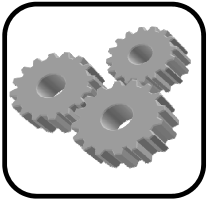
$\max\ 40\, x_1 + 60\, x_2$

$1\, x_1 + 3\, x_2 \leq 36$

$1\, x_1 + 1\, x_2 \leq 16$

$2\, x_1 + 1\, x_2 \leq 28$

$x_1,\, x_2 \geq 0$



$x_1^* = 6\ x_2^* = 10,\ f\,(x^*) = 840$

**Soluzione**

# Validazione del modello

L'analisi delle soluzioni "sul campo" può evidenziare errori nel modello. Ad esempio, il pasticciere non ci aveva detto che per preparare le uova serve anche lo zucchero!

Integriamo l'input del problema:

| | zucchero |
|---|---|
| EXTRA | 15g/uovo |
| SUPER | 20g/uovo |
| | 280 g |

nuovo vincolo: $15x_E + 20x_S \leq 280$ violato dalla soluzione!

# Contesti applicativi della RO

- Trasporti e Logistica
- Telecomunicazioni
- Sistemi di produzione
- Sistemi di servizio
- Finanza
- Medicina ...

Diversi tipi di modelli di ottimizzazione si trovano nel sito:
www.scienceofbetter.org

Numerose applicazioni industriali in: www.neos-server.org

# Problema di Ottimizzazione

In generale, data una funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, ed un insieme $X \subseteq \mathbb{R}^n$, si dice *Problema di Ottimizzazione* un problema della forma:

$$\begin{aligned} \min f(x) \\ x \in X \end{aligned}$$

- $X$ è detto *regione ammissibile*
- $f : X \to \mathbb{R}$ è detta *funzione obiettivo*

Un problema di ottimizzazione consiste quindi nel trovare, se esiste, un punto di minimo $x^*$ della funzione $f$ fra i punti dell'insieme $X$.

$x^*$ è detta *soluzione ottima*, $f(x^*)$ *valore ottimo*

# Classificazione

- problemi di ottimizzazione **continua**
  le variabili possono assumere tutti i valori reali $(\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n)$
  - *vincolata* se $X \subset \mathbb{R}^n$
  - *non vincolata* se $X = \mathbb{R}^n$
- problemi di ottimizzazione **discreta**
  le variabili sono vincolate ad assumere valori interi $(\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n)$
  - *ottimizzazione intera* se $X \subseteq \mathbb{Z}^n$
  - *ottimizzazione booleana* se $X \subseteq \{0, 1\}^n$
- problemi **misti**
  solo alcune delle variabili sono vincolate ad assumere valori interi

# Problemi di Programmazione Matematica

Spesso l'insieme $X$ è descritto da un numero finito $m$ di disuguaglianze del tipo $g(x) \geq b$, con $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Quindi:

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n | g_1(x) \geq b_1, \ldots, g_m(x) \geq b_m\}$$

le disuguaglianze $g_i(x) \geq b_i$ sono dette *vincoli*

Problema di Programmazione Matematica:

$$\begin{aligned} &\min f(x) \\ &\quad g_i(x) \geq b_i, \qquad i = i, \ldots, m \end{aligned}$$

# Classificazione

- Programmazione Lineare (PL)

  la funzione obiettivo $f(x)$ e le funzioni $g_i(x)$, $i = i, \ldots, m$ sono lineari, cioè esprimibili nella forma $c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$

- Programmazione Non Lineare (PNL)

  almeno una delle funzioni non è lineare

# Problema dell'assegnamento

3 artigiani sono disponibili a realizzare tre lavori. Assegnare un lavoro ad un artigiano comporta un costo.
Riassumiamo tali costi in una tabella:

| | | lavori | | |
|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 | 3 |
| | 1 | 10 | 12 | 20 |
| artigiani | 2 | 7 | 15 | 18 |
| | 3 | 14 | 10 | 9 |

Problema:
Assegnare esattamente un lavoro ad ogni artigiano in modo da minimizzare i costi

# Modello matematico

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{lavoro } j \text{ assegnato all'artigiano } i \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\min 10x_{11}+12x_{12}+20x_{13}+7x_{21}+15x_{22}+18x_{23}+14x_{31}+10x_{32}+9x_{33}$$

$$x_{11}+x_{12}+x_{13}=1$$
$$x_{21}+x_{22}+x_{23}=1$$
$$x_{31}+x_{32}+x_{33}=1$$

ad ogni artigiano un lavoro

$$x_{11}+x_{21}+x_{31}=1$$
$$x_{12}+x_{22}+x_{32}=1$$
$$x_{13}+x_{23}+x_{33}=1$$

ogni lavoro ad un artigiano