Metodo delle due fasi

- Il problema artificiale
- la fase I del Simplesso
- esempi

rif. Fi 3.2.5;

Osservazione

Nel problema $\min\{\mathbf{c}^T\mathbf{x} : \mathbf{A}\mathbf{x} = 0, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$, dell'esempio precedente si ha che $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$ e $\mathbf{A}$ contiene una matrice identità di ordine m.

Questo accade sempre se il problema in forma standard è stato ottenuto dalla trasformazione:

$$\begin{aligned} \min \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq 0_n \end{aligned} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{aligned} \min \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{I}\mathbf{s} = \mathbf{b} \\ \mathbf{x}, \mathbf{s} \geq 0_n \end{aligned}$$

la matrice I può essere utilizzata come base ammissibile iniziale.

In generale, c'è bisogno di un metodo che calcoli una base *ammissibile* iniziale o certifichi che non esiste (problema inammissibile)

Metodo delle due fasi

- Fase I: calcolare una base iniziale o certificare che il problema è inammissibile (STOP);
- Fase II: (se esiste una base iniziale) risolvere il problema applicando il metodo del simplesso

vediamo come anche la Fase I sia realizzata mediante il metodo del simplesso.

Problema artificiale

Dato un problema in forma standard $\min\{\mathbf{c}^T\mathbf{x} : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$, con $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$, definiamo *problema artificiale*:

$$
\begin{aligned}
w = \min \sum_{i=1}^{m} y_i \\
\text{s.t.} \quad & \\
\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{I}\mathbf{y} = \mathbf{b} \\
\mathbf{x}, \mathbf{y} \geq \mathbf{0}
\end{aligned}
$$

le variabili $\mathbf{y}$ sono dette *artificiali*.

Esempio

$$\min 3x_1 + 4x_2 + 6x_3$$

s.t.

$$x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1$$
$$2x_1 + x_2 + 3x_3 = 2$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$\min y_1 + y_2$$

s.t.

$$x_1 + 3x_2 + 4x_3 + y_1 = 1$$
$$2x_1 + x_2 + 3x_3 + y_2 = 2$$
$$x_1, x_2, x_3, y_1, y_2 \geq 0$$

da cui il tableau:

0	0	0	1	1	0
1	3	4	1	0	1
2	1	3	0	1	2

sottraendo alla riga 0 le altre:

-3	-4	-7	0	0	-3	
1	3	4	1	0	1	y_1
2	1	3	0	1	2	y_2

forma canonica

Fase I

Si osservi che il valore ottimo è banalmente non negativo (problema non illimitato)

Inoltre, il problema è già in forma canonica rispetto alla base ammissibile associata alle variabili aritficiali (la soluzione $\mathbf{x} = \mathbf{0}, \mathbf{y} = \mathbf{b}$ è una sba)

Quindi (dopo aver posto in forma canonica anche la funzione obiettivo) possiamo applicare il Metodo del Simplesso, ottenendo la soluzione ottima $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$ di valore w^*.

Sono possibili 2 casi:

- $w^* > 0$ non esiste una soluzione del prob. artificiale con $y_i = 0, i = 1, \ldots, m$, quindi il sistema $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ non ammette soluzione: il problema originale è **inammissibile**
- $w^* = 0$ quindi $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ e $\mathbf{x}^*$ è sol. ammissibile del problema originale.

$w^* = 0$: variabili artificiali in base o fuori base

2 sottocasi per il tableau ottimo:

(a) tutte le variabili artificiali sono fuori base

- eliminando le colonne corrispondenti alle var. artificiali il tableau è in forma canonica risp. a una base
- sostituire la f.o. artificiale con quella originaria, portare la riga 0 in forma canonica
- applicare il Metodo del Simplesso (Fase II)

(b) una o più variabili y_h sono in base: è necessario eliminarle prima di procedere

Esempio (continua)

scegliamo la var. entrante x_3 e $t = \arg\min\{1/4, 2/3\} = 1 \implies$ var. uscente y_1

-3	-4	-7	0	0	-3	
1	3	**4**	1	0	1	y_1
2	1	3	0	1	2	y_2

$PIVOT$ $(t = 1, 3)$ $\implies$

-5/4	5/4	0	7/4	0	-5/4	
1/4	3/4	1	1/4	0	1/4	x_3
5/4	-5/4	0	-3/4	1	5/4	y_2

scegliamo la var. entrante x_1 e $t = \arg\min\{1, 1\} = 2 \implies$ var. uscente y_2

$PIVOT$ $(t = 2, 1)$ $\implies$

0	0	0	1	1	0	
0	1	1	2/5	-1/4	0	x_3
1	-1	0	-3/5	4/5	1	x_1

soluzione ottima $(1, 0, 0, 0, 0)$ di valore 0

Esempio (continua)

le variabili y_1, y_2 sono fuori base, quindi eliminiamo le corrisp. colonne e ripristiniamo la f.o. originaria

3	4	6	0	
0	1	1	0	x_3
1	-1	0	1	x_1

mettiamo in forma canonica sommando alla riga 0 le righe 1 e 2 moltiplicate per -6 e -3 risp.

0	1	0	-3	
0	1	1	0	x_3
1	-1	0	1	x_1

eseguiamo quindi la FASE II: $\mathbf{c} \geq \mathbf{0} \implies (1, 0, 0)$ è soluzione ottima

Caso b: variabile y_h in base

essendo $w^* = 0$ deve essere $y_h^* = 0$, quindi abbiamo un caso degenere. Se $h = B(i)$, si ha:

x_1	$\cdots$	x_j	$\cdots$	x_n	y_1	$\cdots$	y_h	$\cdots$	y_n		
≥ 0	$\cdots$	≥ 0	$\cdots$	≥ 0			0			0	$-w$
		$\vdots$					$\vdots$				
							0				
$\bar{a}_{i1}$		$\bar{a}_{ij}$		$\bar{a}_{in}$			1			0	y_h
							0				
		$\vdots$					$\vdots$				
							0				

Caso b: variabile y_h in base

• se esiste un $\bar{a}_{ij} \neq 0$, eseguiamo $PIVOT(i, j)$ in modo da far uscire y_h dalla base.

- possiamo farlo anche se $\bar{a}_{ij} < 0$ in quanto $\bar{b}_i = 0$, quindi rimane $\bar{\mathbf{b}} \geq \mathbf{0}$
- il valore $w = w^*$ non cambia

ripetendo il procedimento per tutte le var artificiali in base ci si riconduce al caso $(2a)$.

• se invece tutti i valori $\bar{a}_{i1}, \ldots, \bar{a}_{in}$ sono nulli, eliminando le var. arificiali si ottiene una riga del tableau tutta nulla, cioè la corrispondente equazione era ottenibile come combinazione lineare delle altre e può essere eliminata ($\equiv \mathbf{A}$ non ha rango m)

Esempio

$$\min 7x_1 - 3x_2 - 6x_3$$

s.t.

$$3x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 3$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$\min y_1 + y_2$$

s.t.

$$3x_1 - 4x_2 - 2x_3 + y_1 = 3$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + y_2 = 1$$
$$x_1, x_2, x_3, y_1, y_2 \geq 0$$

da cui il tableau:

0	0	0	1	1	0
3	-4	-2	1	0	3
1	1	1	0	1	1

sottraendo alla riga 0 le altre:

-4	3	1	0	0	-4	
3	-4	-2	1	0	3	y_1
1	1	1	0	1	1	y_2

forma canonica

Esempio

scegliamo la var. entrante x_1 e $t = \arg\min\{1, 1\} = 2 \implies$ var. uscente y_2

-4	3	1	0	0	-4	
3	-4	-2	1	0	3	y_1
1	1	1	0	1	1	y_2

$PIVOT$ $(t = 2, 1)$ $\implies$

0	7	5	0	4	0	
0	-7	-5	1	-3	0	y_1
1	1	1	0	1	1	x_1

OSS. la var artificiale y_1 rimane in base nel tableau ottimo del problema artificiale. Eseguiamo quindi un nuovo pivot:

$PIVOT$ $(t = 1, 3)$ $\implies$

0	0	0	1	1	0	
0	7/5	1	-1/5	3/5	0	x_3
1	-2/5	0	1/5	-2/5	1	x_1

tutte le var. artificiali sono fuori base

Esempio

eliminiamo le var. artificiali e ripristiniamo la funzione obiettivo originaria:

7	-3	-6	0
0	7/5	1	0
1	-2/5	0	1

in forma canonica

$\Longrightarrow$

0	41/5	0	-7
0	7/5	1	0
1	-2/5	0	1

Inizia FASE II:

STOP: $(1, 0, 0)$ **soluzione ottima**