Convergenza del Simplesso e regole anti-ciclaggio

- degenerazione e ciclaggio
- un esempio di ciclaggio
- regole anti-ciclaggio

rif. Fi 3.2.6, BT 3.4 (Esempio 3.6), BT 3.7;

Sulla convergenza del metodo del simplesso

- il numero di basi ammissibili è al più $\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$
- in una iterazione in cui entra in base x_h ed esce $x_{B(t)}$ il valore della funzione obiettivo diminuisce della quantità $\theta \cdot |\bar{c}_h|$, con $\theta = \bar{b}_t / \bar{a}_{th} = \min\{\bar{b}_i / \bar{a}_{ih} : i = 1, \ldots, m, \bar{a}_{ih} > 0\}$
- se $\theta > 0$ ad ogni iterazione, il valore di f.o. diminuisce in modo strettamente monotono
- in questo caso, il metodo del simplesso visita ciascuna base al più una volta, cioè converge in un numero finito di passi

Degenerazione e ciclaggio

- sfortunatamente, in presenza di basi degeneri, cioè di valori $\bar{b}_i = 0$ si ha $\theta = 0 \implies$ al cambiamento di base NON corrisponde un cambiamento di vertice
- può accadere che, dopo un certo numero di scambi degeneri, si riottenga una base già visitata (cioè un tableau già ottenuto)
- in questo caso il metodo visita ciclicamente e indefinitamente una sequenza di basi degeneri

Esempio di ciclaggio (BT, cap 3 - example 3.6)

-3/4	20	-1/2	6	0	0	0	3	
1/4	-8	-1	9	1	0	0	0	$= x_5$
1/2	-12	-1/2	3	0	1	0	0	$= x_6$
0	0	1	0	0	0	1	1	$= x_7$

Applicare la seguente **regola di pivoting**:

- variabile entrante: la "più negativa"
- variabile uscente: fra tutte le righe t per cui $\bar{b}_t/\bar{a}_{th} = \theta$ scegliere quella con il minimo $B(t)$

Dopo 6 iterazioni si ottiene di nuovo il tableau iniziale

Regola di Bland

Scegliere la variabile entrante x_h e quella uscente $x_{B(t)}$ preferendo, fra le opzioni possibili, quelle di indice minimo:

- $h = \arg\min\{j : \bar{c}_j < 0\}$
- fra tutte le righe t per cui $\bar{b}_t/\bar{a}_{th} = \theta$ scegliere quella con il minimo $B(t)$

Esempio

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7		
5	-1	0	-10	0	0	0	-10	$= -z$
1	4	0	1	1	0	0	8	$= x_5$
-1	3	1	0	0	0	0	6	$= x_3$
0	-2	0	3	0	1	0	1	$= x_6$
3	1	0	-2	0	0	1	2	$= x_7$

La variabile fuori base con costo ridotto negativo e indice minimo è $x_h = x_2$. Per la variabile uscente si hanno tre opzioni:

- $t = 1 \implies$ esce $x_{B(1)} = x_5$
- $t = 2 \implies$ esce $x_{B(2)} = x_3$ (Bland sceglie $t = 2$)
- $t = 4 \implies$ esce $x_{B(4)} = x_7$

Teorema di convergenza

Utilizzando la regola di Bland il metodo del simplesso converge dopo al più $\binom{n}{m}$ iterazioni

Dimostrazione Per assurdo, supponiamo che esistano istanze di PL per cui si verifichi un ciclaggio, cioè la visita di una sequenza di basi $B_1, B_2, \ldots, B_k = B_1$

- fra queste, ne consideriamo una minimale: tutte le righe e colonne del tableau sono state coperte da un qualche elemento di pivot durante la sequenza, altrimenti potremmo eliminarle, riducendo l'istanza
- quindi, tutte le variabili entrano ed escono a turno dalla base
- inoltre, deve essere $\bar{b}_i = 0, i = 1, \ldots, m$: altrimenti, nel pivot associato ad una riga i con $\bar{b}_i > 0$ si avrebbe $\theta > 0$ rompendo il ciclaggio

Dimostrazione

Consideriamo il tableau T in cui $x_n = x_{B(t)}$ esce dalla base corrente per far entrare una certa var. x_h fuori base

$$
\begin{array}{ccccccc|cl}
 & & & \textbf{entra} & & \textbf{esce} & & & \\
\cdots & x_{B(i)} & \cdots & x_h & \cdots & x_n & & & \\
\hline
 & 0 & & <0 & & 0 & & -z & \\
\hline
 & 0 & & \leq 0 & & 0 & & 0 & \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
 & 1 & & \leq 0 & & 0 & & 0 & = x_{B(i)} \\
 & 0 & & \leq 0 & & 0 & & 0 & \\
 & 0 & & >0 & & 1 & & 0 & = x_{B(t)} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & & \\
 & 0 & & \leq 0 & & 0 & & 0 & \\
\hline
\end{array}
$$

indici di base $B(1), \ldots, B(m)$

Dimostrazione

$$
\begin{array}{ccccccc|cl}
 & \cdots & x_{B(i)} & \cdots & x_h & \cdots & x_n & & \\
\hline
 & & 0 & & < 0 & & 0 & -z & \\
\hline
 & & 0 & & \leq 0 & & 0 & 0 & \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \\
 & & 1 & & \leq 0 & & 0 & 0 & = x_{B(i)} \\
 & & 0 & & \leq 0 & & 0 & 0 & \\
 & & 0 & & > 0 & & 1 & 0 & = x_{B(t)} \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \\
 & & 0 & & \leq 0 & & 0 & 0 & \\
\hline
\end{array}
$$

- $\bar{b}_i = 0, i = 1, \ldots, m$
- $\bar{a}_{ih} \leq 0, i \neq t$: se esistesse $i \neq t$, con $\bar{a}_{ih} > 0$ la regola di Bland avrebbe scelto $x_{B(i)}$ e non x_n come var. uscente

Dimostrazione

Consideriamo adesso il tableau $\tilde{T}$ in cui x_n rientra in base

$\cdots$	$x_{B(i)}$	$\cdots$	x_h	$\cdots$	x_n	
≥ 0	≥ 0	≥ 0	≥ 0	≥ 0	< 0	

- $\tilde{c}_n < 0$
- $\tilde{c}_j \geq 0, j \neq n$

per ottenere $\tilde{T}$ da T mediante una sequenza di pivot, devono esistere moltiplicatori $\mu_1, \ldots, \mu_m$ tali che:

$$[\text{riga } 0 \text{ di } \tilde{T}] = [\text{riga } 0 \text{ di } T] + \sum_{i=1}^{m} \mu_i [\text{riga } i \text{ di } T]$$

Dimostrazione

tableau T: x_n esce dalla base

$\cdots$	$x_{B(i)}$	$\cdots$	x_h	$\cdots$	x_n		
	0		< 0		0	$-z$	
	0		≤ 0		0	0	
	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	
	1		≤ 0		0	0	$= x_{B(i)}$
	0		≤ 0		0	0	
	0		> 0		1	0	$= x_{B(t)}$
$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		
	0		≤ 0		0	0	

tableau $\tilde{T}$: x_n entra in base

$\cdots$	$x_{B(i)}$	$\cdots$	x_h	$\cdots$	x_n	
≥ 0	≥ 0	≥ 0	≥ 0	≥ 0	< 0	

Dimostrazione

$$[\text{riga } 0 \text{ di } \tilde{T}] = [\text{riga } 0 \text{ di } T] + \sum_{i=1}^{m} \mu_i [\text{riga } i \text{ di } T]$$

Consideriamo i costi ridotti in $\tilde{T}$ corrispondenti agli indici $B(1), \ldots, B(m)$:

- $\tilde{c}_{B(t)} = \tilde{c}_n = \bar{c}_{B(t)} + \mu_t = \mu_t$, quindi $\tilde{c}_n < 0 \implies \mu_t < 0$
- $\tilde{c}_{B(i)} = \bar{c}_{B(i)} + \mu_i = \mu_i$ quindi $\tilde{c}_{B(i)} \geq 0$ (regola di Bland) $\implies \mu_i \geq 0, i \neq t$

Dimostrazione

tableau T: x_n esce dalla base

$\cdots$	$x_{B(i)}$	$\cdots$	x_h	$\cdots$	x_n		
	0		< 0		0	$-z$	
	0		≤ 0		0	0	
	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	
	1		≤ 0		0	0	$= x_{B(i)}$
	0		≤ 0		0	0	
	0		> 0		1	0	$= x_{B(t)}$
$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		
	0		≤ 0		0	0	

tableau $\tilde{T}$: x_n entra in base

$\cdots$	$x_{B(i)}$	$\cdots$	x_h	$\cdots$	x_n	
≥ 0	≥ 0	≥ 0	≥ 0	≥ 0	< 0	

Dimostrazione

Torniamo a considerare la variabile h nel tabeau $\tilde{T}$.
Deve essere $\tilde{c}_h \geq 0$. Analizziamo la sua espressione:

$$\tilde{c}_h = \bar{c}_h + \sum_{i \neq t} \bar{a}_{ih}\mu_i + \bar{a}_{th}\mu_t$$

con $\bar{c}_h < 0$
$\bar{a}_{ih} \leq 0$, $\mu_i \geq 0$
$\bar{a}_{th} > 0$, $\mu_t < 0$

quindi, risulta $\tilde{c}_h < 0$ **contraddizione** $\square$

Sull'efficienza di un'iterazione

Consideriamo il numero di operazioni aritmetiche delle operazioni su vettori e matrici:

calcolo $\mathbf{B}^{-1}$, soluzione $\mathbf{Bx} = \mathbf{b}$	$O(m^3)$
prodotto $\mathbf{Bb}$	$O(m^2)$
prodotto $\mathbf{u}^T\mathbf{b}$	$O(m)$

Il costo computazionale di un'iterazione è quindi:

implementazione matriciale		implementazione tableau	
calcolo $\mathbf{B}^{-1}$	$O(m^3)$	pivot	$O(nm)$
calcolo $\bar{\mathbf{c}}$	$O(m^2 + nm) = O(nm)$		
totale	$O(m^3 + nm)$		$O(nm)$

ricordate che $\bar{\mathbf{c}}_F^T := \mathbf{c}_F^T - \mathbf{u}^T F$, con $\mathbf{u}^T = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}$

Sulle regole di pivoting

- La regola di Bland evita il ciclaggio, ma non tiene conto della rapidità di convergenza del metodo
- scelte ragionevoli per la variabile entrante: fra le variabili j tali che $\bar{c}_j < 0$ sceglie x_h tale che
  - **variabile 'più negativa':** ha il massimo valore $|\bar{c}_h|$
  - **max diminuzione della f.o.:** ha il massimo valore $\theta \cdot |\bar{c}_h|$

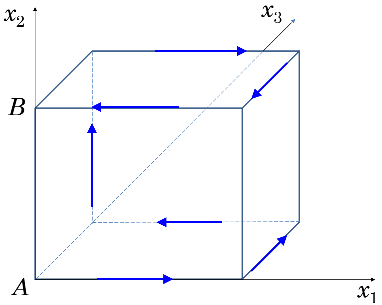
quest'ultimo criterio è spesso computazionalmente troppo oneroso, sebbene riduca il numero di iterazioni.

Sul numero di iterazioni

consideriamo un problema nel cubo unitario:

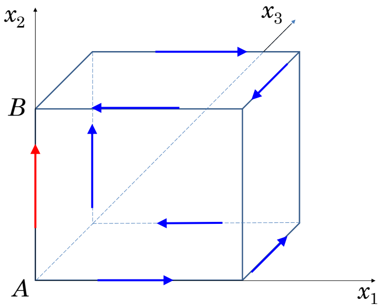
$$0 \leq x_i \leq 1, \qquad i = 1, \ldots, n$$

che ha 2^n vertici.
Una regola di pivoting che corrisponde ad un cammino che tocca tutti i vertici risulta in un numero esponenziale di iterazioni



Sul numero di iterazioni

tuttavia il primo vertice A e l'ultimo vertice B sono adiacenti: una diversa regola di pivoting terminerebbe in una iterazione!!



- per molte regole di pivoting "ragionevoli" esistono esempi per cui la regola risulta in un numero esponenziale di iterazioni
- questi NON escludono la possibilità che un'altra regola possa fare meglio

Diametro di un poliedro

possiamo stimare il numero di iterazioni nel caso peggiore, in modo indipendente dalla regola di pivoting?

Definizione

Dati due vertici $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ definiamo distanza fra $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ il minimo numero $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ di "salti" fra vertici adiacenti necessari per passare da $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$

Definizione

Definiamo diametro $D(P)$ di un poliedro P la massima distanza $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ fra tutte le coppie $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ di vertici di P.

Sia inoltre $\Delta(n, m)$ il massimo $D(P)$ se P è un politopo in $\mathbb{R}^n$ definito da m disuguaglianze

La congettura di Hirsch

- se il simplesso inizia da un vertice $\mathbf{x}$ e l'unica soluzione ottima è $\mathbf{y}$, allora servono almeno $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ iterazioni
- quindi, se $\Delta(n, m)$ cresce esponenzialmente con n ed m, allora il simplesso richiederebbe un numero esponenziale di iterazioni indipendentemente dalla regola di pivoting
- quindi, è possibile sviluppare regole di pivoting "efficienti" solo se $\Delta(n, m)$ cresce polinomialmente con n ed m

Congettura di Hirsch: $\Delta(n, m) \leq m - n$

- nel 2010 è stato trovato un controesempio, che, tuttavia, non esclude la possibilità che il metodo del simplesso converga in tempo polinomiale. L'esperienza pratica mostra che richiede tipicamente $O(m)$ iterazioni