Dualità nella Programmazione Lineare

- Problema duale: definizione e motivazioni
- Dualità nella PL
- Costruzione del problema duale

BT 4.1, 4.2;

Problema duale

Dato un problema di minimo, detto *primale*, del tipo:

$$
\begin{aligned}
z^* = \min f(\mathbf{x}) \\
\mathbf{x} \in X
\end{aligned}
$$

con $f(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}^n$, costruiamo un nuovo problema, in forma di massimo, detto *duale*:

$$
\begin{aligned}
w^* = \max g(\mathbf{p}) \\
\mathbf{p} \in S
\end{aligned}
$$

con $f(\mathbf{p}) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $S \subseteq \mathbb{R}^m$, per cui, se $X \neq \emptyset$, $S \neq \emptyset$ risulti

$$z^* \geq w^*$$

relazione di *dualità debole*

Problema duale

Dato un problema di minimo, detto *primale*, del tipo:

$$
\begin{aligned}
z^* = \min f(\mathbf{x}) \\
\mathbf{x} \in X
\end{aligned}
$$

con $f(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}^n$, costruiamo un nuovo problema, in forma di massimo, detto *duale*:

$$
\begin{aligned}
w^* = \max g(\mathbf{p}) \\
\mathbf{p} \in S
\end{aligned}
$$

con $f(\mathbf{p}) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $S \subseteq \mathbb{R}^m$, per cui, se $X \neq \emptyset$, $S \neq \emptyset$ risulti

$$z^* \geq w^*$$

relazione di *dualità debole*

Condizioni di ottimalità

- Siano $\bar{\mathbf{x}} \in X, \bar{\mathbf{p}} \in S$. La dualità debole implica che, se

$$f(\bar{\mathbf{x}}) = g(\bar{\mathbf{p}}) \tag{1}$$

  allora $\bar{\mathbf{x}}$ e $\bar{\mathbf{p}}$ sono ottime per i rispettivi problemi

- per alcune classi di problemi si riesce a definire un problema duale per cui

$$z^* = w^*$$

  relazione di *dualità forte*

- in questo caso la condizione (1) è necessaria e sufficiente di ottimalità

Dualità nella PL

Iniziamo con un problema $z^* = \min\{\mathbf{c}^T\mathbf{x} : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$ in forma standard, assumiamo che esista una soluzione ottima $\mathbf{x}^*$

Introduciamo un vettore $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^m$ di moltiplicatori di Lagrange e definiamo il nuovo problema:

$$
\begin{aligned}
g(\mathbf{p}) = \min \mathbf{c}^T\mathbf{x} + \mathbf{p}^T(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}) \\
\mathbf{x} \geq \mathbf{0}
\end{aligned}
$$

Proposizione

Per ogni vettore $\mathbf{p}$ di moltiplicatori, si ha $g(\mathbf{p}) \leq z^*$
Infatti:

$$
g(\mathbf{p}) = \min_{\mathbf{x} \geq \mathbf{0}} \mathbf{c}^T\mathbf{x} + \mathbf{p}^T(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}) \leq \mathbf{c}^T\mathbf{x}^* + \mathbf{p}^T(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^*) = \mathbf{c}^T\mathbf{x}^*
$$

$\square$

Esempio

$$\min 2x_1 - x_2 + x_3$$

s.t.

$$3x_1 - x_2 + 2x_3 = 4$$

$$4x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 2$$

$$x_1 + x_3 + x_5 = 2$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

$$g(\mathbf{p}) = \min_{\mathbf{x} \geq \mathbf{0}} [2x_1 - x_2 + x_3 + p_1(4 - 3x_1 + x_2 - 2x_3) +$$

$$+ p_2(2 - 4x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4) + p_3(2 - x_1 - x_3 - x_5)]$$

Esempio

$$\min 2x_1 - x_2 + x_3$$

s.t.

$$3x_1 - x_2 + 2x_3 = 4$$

$$4x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 2$$

$$x_1 + x_3 + x_5 = 2$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

$$g(\mathbf{p}) = \min_{\mathbf{x}\geq\mathbf{0}} [2x_1 - x_2 + x_3 + p_1(4 - 3x_1 + x_2 - 2x_3) +$$

$$+ p_2(2 - 4x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4) + p_3(2 - x_1 - x_3 - x_5)]$$

Esempio

scelta 1: $p_1 = p_2 = p_3 = 1$

$$\min_{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)\geq 0} [-6x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 - x_5 + 8]$$

problema illimitato, $g(\mathbf{p}) = -\infty$

scelta 2: $p_1 = 1; p_2 = 0; p_3 = -1$:

$$\min_{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)\geq 0} [2 + x_5] = 2$$

$g(\mathbf{p}) = 2$, uguale al valore ottimo primale!

Esempio

scelta 1: $p_1 = p_2 = p_3 = 1$

$$\min_{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)\geq 0} [-6x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 - x_5 + 8]$$

problema illimitato, $g(\mathbf{p}) = -\infty$

scelta 2: $p_1 = 1; p_2 = 0; p_3 = -1$:

$$\min_{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)\geq 0} [2 + x_5] = 2$$

$g(\mathbf{p}) = 2$, uguale al valore ottimo primale!

Problema duale

Quindi, costruita la funzione lagrangiana

$$g(\mathbf{p}) = \min \mathbf{c}^T\mathbf{x} + \mathbf{p}^T(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x})$$
$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

la **migliore limitazione inferiore** del valore ottimo primale z^* si ottiene risolvendo problema:

$$\max_{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^m} g(\mathbf{p})$$

no vincoli

questo è scelto come **problema duale** (la dualità debole segue dalla Proposizione)

Struttura del problema duale

$$g(\mathbf{p}) = \min_{\mathbf{x}\geq\mathbf{0}} \mathbf{c}^T\mathbf{x} + \mathbf{p}^T(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T\mathbf{b} + \min_{\mathbf{x}\geq\mathbf{0}}(\mathbf{c}^T - \mathbf{p}^T\mathbf{A})\mathbf{x}$$

Analizziamo il secondo termine

$$\min_{\mathbf{x}\geq\mathbf{0}}(\mathbf{c}^T - \mathbf{p}^T\mathbf{A})\mathbf{x} = \begin{cases} 0 \text{ se } \mathbf{c}^T - \mathbf{p}^T\mathbf{A} \geq \mathbf{0}^T \\ -\infty \text{ altrimenti} \end{cases}$$

Volendo massimizzare $g(\mathbf{p})$, imponiamo il vincolo che esclude il secondo caso:

$$\max_{\mathbf{p}\in\mathbb{R}^m} g(\mathbf{p}) \qquad \Rightarrow \qquad \begin{aligned} &\max \mathbf{p}^T\mathbf{b} \\ &\mathbf{p}^T\mathbf{A} \leq \mathbf{c}^T \end{aligned}$$

no vincoli

ancora un PL!

PL in forma generale

Trasformiamo i vincoli in forma standard e ripetiamo la derivazione precedente:

$$\begin{aligned} &\min \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ &\mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b} \end{aligned} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{aligned} \min \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{I}\mathbf{s} = \mathbf{b} \\ \mathbf{s} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

$$g(\mathbf{p}) = \min_{\mathbf{x}\ \text{free},\ \mathbf{s}\geq\mathbf{0}} \mathbf{c}^T\mathbf{x} + \mathbf{p}^T(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{I}\mathbf{s}) =$$

$$= \mathbf{p}^T\mathbf{b} + \min_{\mathbf{x}\ \text{free},\ \mathbf{s}\geq\mathbf{0}} (\mathbf{c}^T - \mathbf{p}^T\mathbf{A})\mathbf{x} + \mathbf{p}^T\mathbf{s}$$

PL in forma generale

Trasformiamo i vincoli in forma standard e ripetiamo la derivazione precedente:

$$
\begin{array}{rcr}
\min \mathbf{c}^T\mathbf{x} & \Rightarrow & \min \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\
\mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b} & & \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{I}\mathbf{s} = \mathbf{b} \\
 & & \mathbf{s} \geq \mathbf{0}
\end{array}
$$

$$
g(\mathbf{p}) = \min_{\mathbf{x} \text{ free}, \ \mathbf{s} \geq \mathbf{0}} \mathbf{c}^T\mathbf{x} + \mathbf{p}^T(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{I}\mathbf{s}) =
$$

$$
= \mathbf{p}^T\mathbf{b} + \min_{\mathbf{x} \text{ free}, \ \mathbf{s} \geq \mathbf{0}} (\mathbf{c}^T - \mathbf{p}^T\mathbf{A})\mathbf{x} + \mathbf{p}^T\mathbf{s}
$$

PL in forma generale

quindi,

$$\min_{\mathbf{x}\text{ free}} (\mathbf{c}^T - \mathbf{p}^T\mathbf{A})\mathbf{x} = \begin{cases} 0 \text{ se } \mathbf{c}^T - \mathbf{p}^T\mathbf{A} = \mathbf{0}^T \\ -\infty \text{ altrimenti} \end{cases}$$

$$\min_{\mathbf{s}\geq\mathbf{0}} \mathbf{p}^T\mathbf{s} = \begin{cases} 0 \text{ se } \mathbf{p}^T \geq \mathbf{0}^T \\ -\infty \text{ altrimenti} \end{cases}$$

da cui il problema duale:

$$\begin{aligned} \max \mathbf{p}^T\mathbf{b} \\ \mathbf{p}^T\mathbf{A} = \mathbf{c}^T \\ \mathbf{p} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

Riassumendo

primale | **duale**

$$\begin{aligned} \min \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \max \mathbf{p}^T\mathbf{b} \\ \mathbf{p}^T\mathbf{A} \leq \mathbf{c}^T \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \max \mathbf{p}^T\mathbf{b} \\ \mathbf{p}^T\mathbf{A} = \mathbf{c}^T \\ \mathbf{p} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

Regole di costruzione

	primale	duale	
vincoli	$\min\ \mathbf{c}^T\mathbf{x}$ $\mathbf{a}_i^T\mathbf{x} \geq b_i, \quad i \in M_1$ $\mathbf{a}_i^T\mathbf{x} \leq b_i, \quad i \in M_2$ $\mathbf{a}_i^T\mathbf{x} = b_i, \quad i \in M_3$	$\max\ \mathbf{p}^T\mathbf{b}$ $p_i \geq 0, \quad i \in M_1$ $p_i \leq 0, \quad i \in M_2$ p_i libero, $\quad i \in M_3$	variabili
variabili	$x_j \geq 0, \quad j \in N_1$ $x_j \leq 0, \quad j \in N_2$ x_j libero, $\quad j \in N_3$	$\mathbf{p}^T\mathbf{A}_j \leq c_j, \quad j \in N_1$ $\mathbf{p}^T\mathbf{A}_j \geq c_j, \quad j \in N_2$ $\mathbf{p}^T\mathbf{A}_j = c_j, \quad j \in N_3$	vincoli

Esempio

	primale	duale	
	$\min\ 2x_1 - x_2 + x_3$	$\max\ 4p_1 + 2p_2 + 2p_3$	
vincoli	$3x_1 - x_2 + 2x_3 = 4$ $4x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 2$ $x_1 + x_3 \leq 2$	p_1 libera $p_2 \geq 0$ $p_3 \leq 0$	variabili
variabili	$x_1 \geq 0$ $x_2 \geq 0$ $x_3 \geq 0$	$3p_1 + 4p_2 + p_3 \leq 2$ $-p_1 + 2p_2 \leq -1$ $2p_1 - p_2 + p_3 \leq 1$	vincoli

Esempio

trasformiamo il duale in un problema equivalente di minimo:

$$
\begin{aligned}
\max 4p_1 + 2p_2 + 2p_3 \\
\text{s.t.} \\
3p_1 + 4p_2 + p_3 \leq 2 \\
-p_1 + 2p_2 \leq -1 \\
2p_1 - p_2 + p_3 \leq 1 \\
p_1 \text{ libero} \\
p_2 \geq 0 \\
p_3 \leq 0
\end{aligned}
\qquad\qquad
\begin{aligned}
\min -4p_1 - 2p_2 - 2p_3 \\
\text{s.t.} \\
-3p_1 - 4p_2 - p_3 \geq -2 \\
p_1 - 2p_2 \geq 1 \\
-2p_1 + p_2 - p_3 \geq -1 \\
p_1 \text{ libero} \\
p_2 \geq 0 \\
p_3 \leq 0
\end{aligned}
$$

Esempio

costruiamo quindi il duale del problema ottenuto, indicando con $\mathbf{x}$ le sue variabili:

$$\max -2x_1 + x_2 - x_3$$

s.t.

$$-3x_1 + x_2 - 2x_3 = -4$$
$$-4x_1 - 2x_2 + x_3 \leq -2$$
$$-x_1 - x_3 \geq -2$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

ponendo di nuovo in forma di min otteniamo:

$$\min 2x_1 - x_2 + x_3$$

s.t.

$$3x_1 - x_2 + 2x_3 = 4$$
$$4x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 2$$
$$x_1 + x_3 \leq 2$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

coincide col problema di partenza!

In generale

Consideriamo un problema di PL e costruiamo il suo duale. Se trasformiamo quest'ultimo in un problema equivalente di minimo e costruiamo il suo duale otteniamo un problema equivalente al problema di partenza