

Dualità nella Programmazione Lineare

- ▶ Problema duale: definizione e motivazioni
- ▶ Dualità nella PL
- ▶ Costruzione del problema duale

BT 4.1, 4.2;

Problema duale

Dato un problema di minimo, detto *primale*, del tipo:

$$z^* = \min_{x \in X} f(x)$$

costruiamo un nuovo problema, in forma di massimo, detto *duale*:

$$w^* = \max_{p \in S} g(p)$$

per cui, se $X \neq \emptyset$, $S \neq \emptyset$ risulti

$$z^* \geq w^*$$

(relazione di *dualità debole*)

Condizioni di ottimalità

- ▶ Siano $\bar{x} \in X, \bar{p} \in S$. La dualità debole implica che, se

$$f(\bar{x}) = g(\bar{p}) \quad (1)$$

allora \bar{x} e \bar{p} sono **ottime** per i rispettivi problemi

- ▶ per alcune classi di problemi si riesce a definire un problema duale per cui

$$z^* = w^*$$

(relazione di *dualità forte*)

- ▶ in questo caso la condizione (1) è necessaria e sufficiente di ottimalità

Dualità nella PL

Iniziamo con un problema $z^* = \min\{\mathbf{c}^T \mathbf{x} : \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$ in forma standard, assumiamo che esista una soluzione ottima \mathbf{x}^*

Introduciamo un vettore $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^m$ di moltiplicatori di Lagrange e definiamo il nuovo problema:

$$g(\mathbf{p}) = \min_{\mathbf{x} \geq \mathbf{0}} \mathbf{c}^T \mathbf{x} + \mathbf{p}^T (\mathbf{b} - \mathbf{Ax})$$

Proposizione

Per ogni vettore \mathbf{p} di moltiplicatori, si ha $g(\mathbf{p}) \leq z^*$

Infatti:

$$g(\mathbf{p}) = \min_{\mathbf{x} \geq \mathbf{0}} \mathbf{c}^T \mathbf{x} + \mathbf{p}^T (\mathbf{b} - \mathbf{Ax}) \leq \mathbf{c}^T \mathbf{x}^* + \mathbf{p}^T (\mathbf{b} - \mathbf{Ax}^*) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}^*$$



Esempio

$$\begin{aligned} & \min 2x_1 - x_2 + x_3 \\ \text{s.t.} & \\ & 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 4 \\ & 4x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 2 \\ & x_1 + x_3 + x_5 = 2 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(\mathbf{p}) = \min_{\mathbf{x} \geq \mathbf{0}} & [2x_1 - x_2 + x_3 + p_1(4 - 3x_1 + x_2 - 2x_3) \\ & + p_2(2 - 4x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4) + p_3(2 - x_1 - x_3 - x_5)] \end{aligned}$$

Esempio

scelta 1: $p_1 = p_2 = p_3 = 1$

$$\min_{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \geq 0} [-6x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 - x_5 + 8]$$

problema **illimitato**

scelta 2: $p_1 = 1; p_2 = 0; p_3 = -1$:

$$\min_{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \geq 0} [2 + x_5] = 2$$

valore ottimo uguale al valore ottimo primale!

Problema duale

La migliore limitazione inferiore del valore ottimo primale z^* si ottiene risolvendo problema:

$$\max_{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^m} g(\mathbf{p})$$

no vincoli

questo è scelto come problema duale (la dualità debole segue dalla Proposizione)

Struttura del problema duale

$$g(\mathbf{p}) = \min_{\mathbf{x} \geq \mathbf{0}} \mathbf{c}^T \mathbf{x} + \mathbf{p}^T (\mathbf{b} - \mathbf{A} \mathbf{x}) = \mathbf{p}^T \mathbf{b} + \min_{\mathbf{x} \geq \mathbf{0}} (\mathbf{c}^T - \mathbf{p}^T \mathbf{A}) \mathbf{x}$$

Analizziamo il secondo termine

$$\min_{\mathbf{x} \geq \mathbf{0}} (\mathbf{c}^T - \mathbf{p}^T \mathbf{A}) \mathbf{x} = \begin{cases} 0 & \text{se } \mathbf{c}^T - \mathbf{p}^T \mathbf{A} \geq \mathbf{0}^T \\ -\infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Volendo massimizzare $g(\mathbf{p})$, imponiamo il vincolo che esclude il secondo caso:

$$\begin{array}{l} \max_{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^m} g(\mathbf{p}) \\ \text{no vincoli} \end{array} \quad \Rightarrow$$

$$\begin{array}{l} \max \mathbf{p}^T \mathbf{b} \\ \mathbf{p}^T \mathbf{A} \leq \mathbf{c}^T \end{array}$$

ancora un PL!

PL in forma generale

Trasformiamo il problema in forma standard e ripetiamo la derivazione precedente:

$$\begin{array}{ll} \min \mathbf{c}^T \mathbf{x} & \Rightarrow \quad \min \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \mathbf{Ax} \geq \mathbf{b} & \mathbf{Ax} - \mathbf{Is} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{s} \geq \mathbf{0} \end{array}$$

$$\begin{aligned} g(\mathbf{p}) &= \min_{\mathbf{x} \text{ free}, \mathbf{s} \geq \mathbf{0}} \mathbf{c}^T \mathbf{x} + \mathbf{p}^T (\mathbf{b} - \mathbf{Ax} + \mathbf{Is}) = \\ &= \mathbf{p}^T \mathbf{b} + \min_{\mathbf{x} \text{ free}, \mathbf{s} \geq \mathbf{0}} (\mathbf{c}^T - \mathbf{p}^T \mathbf{A}) \mathbf{x} + \mathbf{p}^T \mathbf{s} \end{aligned}$$

PL in forma generale

quindi,

$$\min_{\mathbf{x} \text{ free}} (\mathbf{c}^T - \mathbf{p}^T \mathbf{A})\mathbf{x} = \begin{cases} 0 & \text{se } \mathbf{c}^T - \mathbf{p}^T \mathbf{A} = \mathbf{0}^T \\ -\infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\min_{\mathbf{s} \geq \mathbf{0}} \mathbf{p}^T \mathbf{s} = \begin{cases} 0 & \text{se } \mathbf{p}^T \geq \mathbf{0}^T \\ -\infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

da cui il problema duale:

$$\begin{aligned} \max \mathbf{p}^T \mathbf{b} \\ \mathbf{p}^T \mathbf{A} &= \mathbf{c}^T \\ \mathbf{p} &\geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

Riassumendo

primale

$$\min \mathbf{c}^T \mathbf{x}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

$$\min \mathbf{c}^T \mathbf{x}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}$$

duale

$$\max \mathbf{p}^T \mathbf{b}$$

$$\mathbf{p}^T \mathbf{A} \leq \mathbf{c}^T$$

$$\max \mathbf{p}^T \mathbf{b}$$

$$\mathbf{p}^T \mathbf{A} = \mathbf{c}^T$$

$$\mathbf{p} \geq \mathbf{0}$$

Regole di costruzione

	primale	duale	
	$\min \mathbf{c}^T \mathbf{x}$	$\max \mathbf{p}^T \mathbf{b}$	
vincoli	$\mathbf{a}_i^T \mathbf{x} \geq b_i, \quad i \in M_1$ $\mathbf{a}_i^T \mathbf{x} \leq b_i, \quad i \in M_2$ $\mathbf{a}_i^T \mathbf{x} = b_i, \quad i \in M_3$	$p_i \geq 0, \quad i \in M_1$ $p_i \leq 0, \quad i \in M_2$ p_i libero, $i \in M_3$	variabili
variabili	$x_j \geq 0, \quad j \in N_1$ $x_j \leq 0, \quad j \in N_2$ x_j libero, $j \in N_3$	$\mathbf{p}^T \mathbf{A}_j \leq c_j, \quad j \in N_1$ $\mathbf{p}^T \mathbf{A}_j \geq c_j, \quad j \in N_2$ $\mathbf{p}^T \mathbf{A}_j = c_j, \quad j \in N_3$	vincoli

Esempio

	primale	duale	
vincoli	$\min 2x_1 - x_2 + x_3$ $3x_1 - x_2 + 2x_3 = 4$ $4x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 2$ $x_1 + x_3 \leq 2$	$\max 4p_1 + 2p_2 + 2p_3$ p_1 libero $p_2 \geq 0$ $p_3 \leq 0$	variabili
variabili	$x_1 \geq 0$ $x_2 \geq 0$ $x_3 \geq 0$	$3p_1 + 4p_2 + p_3 \leq 2$ $-p_1 + 2p_2 \leq -1$ $2p_1 - p_2 + p_3 \leq 1$	vincoli

Esempio

trasformiamo il duale in un problema equivalente di minimo:

$$\max 4p_1 + 2p_2 + 2p_3$$

s.t.

$$3p_1 + 4p_2 + p_3 \leq 2$$

$$-p_1 + 2p_2 \leq -1$$

$$2p_1 - p_2 + p_3 \leq 1$$

p_1 libero

$$p_2 \geq 0$$

$$p_3 \leq 0$$

$$\min -4p_1 - 2p_2 - 2p_3$$

s.t.

$$-3p_1 - 4p_2 - p_3 \geq -2$$

$$p_1 - 2p_2 \geq 1$$

$$-2p_1 + p_2 - p_3 \geq -1$$

p_1 libero

$$p_2 \geq 0$$

$$p_3 \leq 0$$

Esempio

costruiamo quindi il duale del problema ottenuto, indicando con x le sue variabili:

$$\begin{aligned} \max & -2x_1 + x_2 - x_3 \\ \text{s.t.} & \\ & -3x_1 + x_2 - 2x_3 = -4 \\ & -4x_1 - 2x_2 + x_3 \leq -2 \\ & -x_1 - x_3 \geq -2 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

ponendo di nuovo in forma di min
otteniamo:

$$\begin{aligned} \min & 2x_1 - x_2 + x_3 \\ \text{s.t.} & \\ & 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 4 \\ & 4x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 2 \\ & x_1 + x_3 \leq 2 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

coincide col problema di
partenza!

In generale

Consideriamo un problema di PL e costruiamo il suo duale. Se trasformiamo quest'ultimo in un problema equivalente di minimo e costruiamo il suo duale otteniamo un problema equivalente al problema di partenza